

Leidse bijdragen aan de grondslagen van de moderne natuurkunde

Leiden, 3 maart 2005

Einstein en De Sitter aan de wieg van de relativistische kosmologie

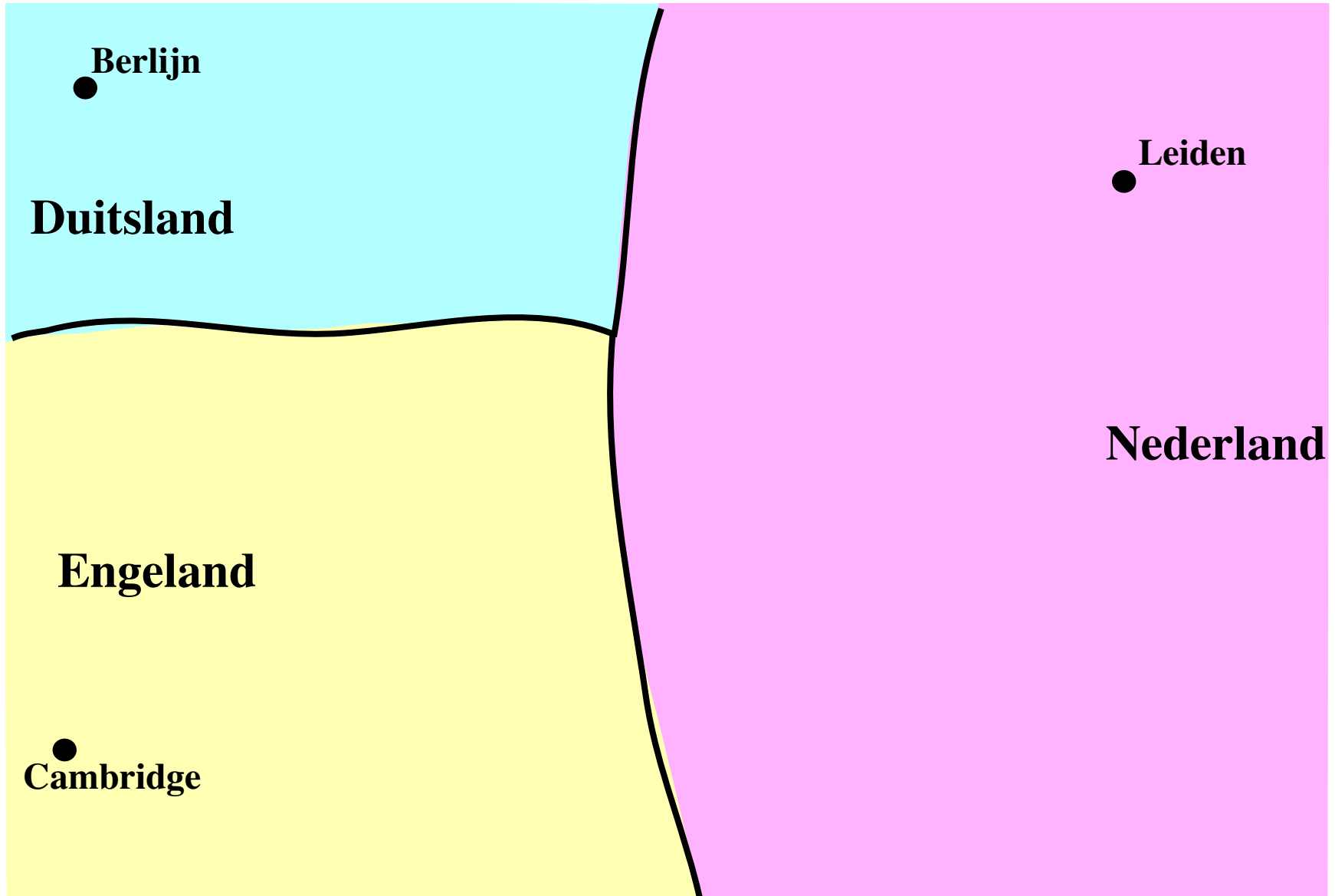
Michel Janssen

Program in History of Science and Technology

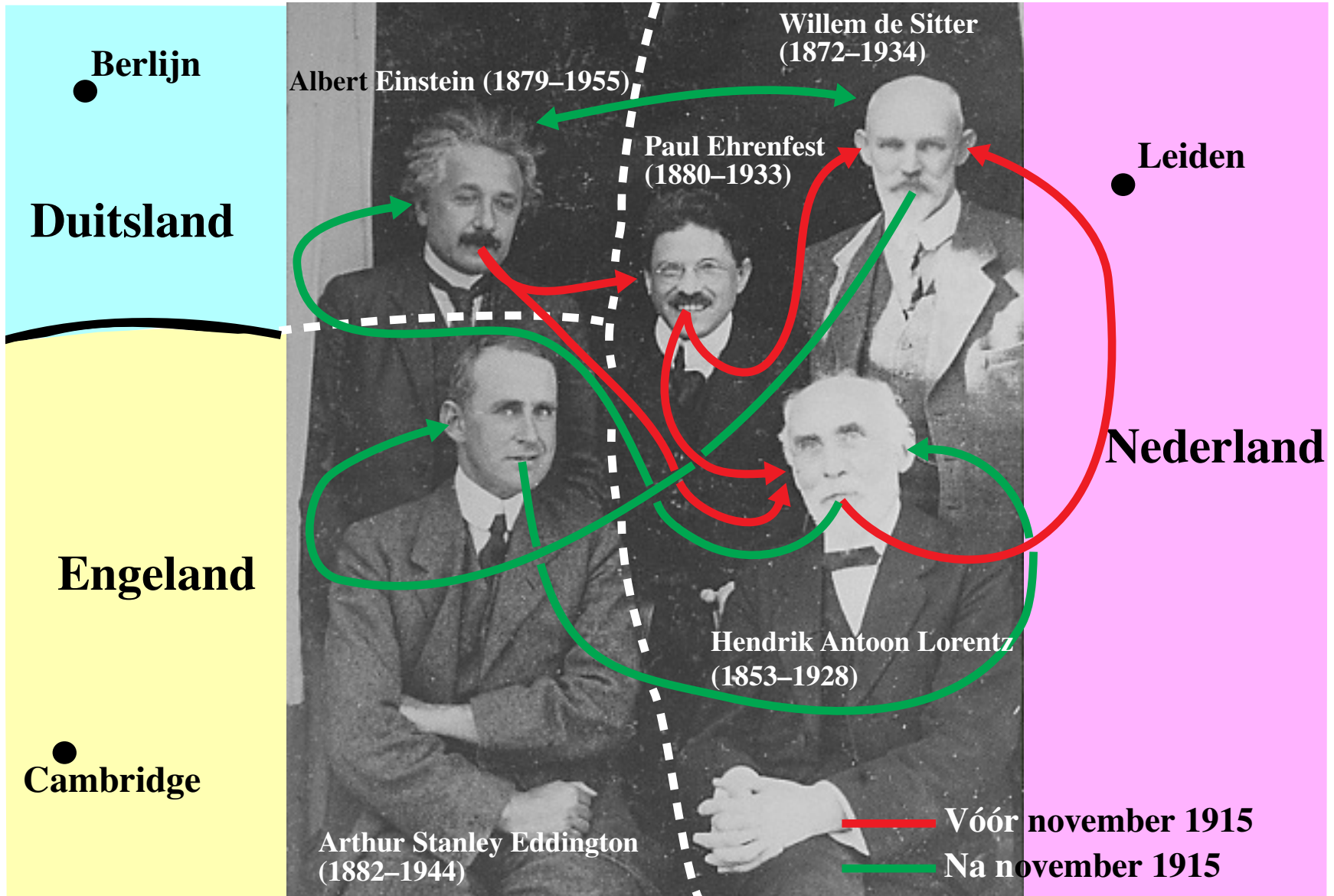
University of Minnesota

Tijdens een bezoek aan Leiden in 1916 raakte Albert Einstein (1879–1955) in discussie met de Leidse astronoom Willem de Sitter (1872-1934). De discussie werd per brief voortgezet en twee jaar later kwam onze landgenoot als overwinnaar uit de strijd. Einstein moest toegeven dat hij zijn nieuwe zwaartekrachtstheorie ten onrechte de algemene relativiteitstheorie had genoemd. Hoe je het ook wendt of keert, versnelde beweging blijft absoluut in Einsteins theorie. Ondertussen hadden Einstein en De Sitter de basis gelegd voor relativistische kosmologie. Zowel de beruchte kosmologische konstante als de naar Einstein en De Sitter genoemde kosmologische modellen maakten voor het eerst hun opwachting in de loop van dit filosofische debat.

Ontstaansgeschiedenis van ART in een notedop, 1912–1919



Ontstaansgeschiedenis van ART in een notedop,,1912–1919



Een reis belangrijker dan het doel: Einsteins kruistocht tegen absolute beweging, 1907–1920

Als ich (i. J. 1907) mit einer zusammenfassenden Arbeit über die spezielle Relativitätstheorie [...] beschäftigt war, da musste ich auch versuchen, die Newton'sche Gravitationstheorie so zu modifizieren, dass ihre Gesetze in die Theorie hineinpassten [...]. Da kam mir **der glücklichste Gedanke meines Lebens** in folgender Form. **Das Gravitationsfeld hat an einem betrachteten in ähnlicher Weise nur eine relative Existenz wie das durch magnetelektrische Induktion erzeugte elektrische Feld.** *Denn für einen vom Dache eines Hauses frei herabfallenden Beobachter existiert während seines Falles — wenigstens in seiner unmittelbaren Umgebung — kein Gravitationsfeld.* Der Beobachter ist also berechtigt, seinen Zustand als „Ruhe“ zu deuten.

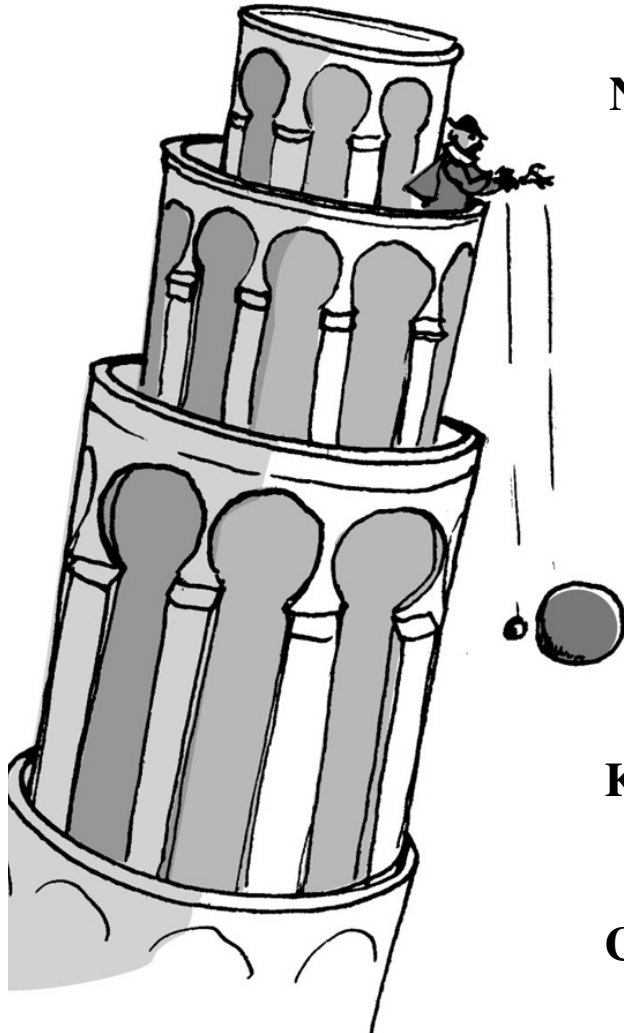
— *Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie, in ihrer Entwicklung dargestellt* (1919–1920), bedoeld voor Nature maar nooit gepubliceerd (nu in Pierpont Morgan Library, New York).

Een reis belangrijker dan het doel: Einsteins kruistocht tegen absolute beweging, 1907–1920

Der ungemein sonderbare Erfahrungssatz, dass alle Körper in demselben Schwerefelde mit gleicher Beschleunigung fallen, erhielt durch diesen Gedanken sofort einen tiefen physikalischen Sinn. [...] so fehlt zunächst jeder objektive Grund für den Beobachter, sich als einen in einem Gravitationsfelde fallenden zu betrachten. Er hat vielmehr das Recht, seinen Zustand als ruhend und seine Umgebung bezüglich der Gravitation als feldfrei zu betrachten. Die Erfahrungsthat sache von der Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung vom Material ist also ein mächtiges Argument dafür, dass **das Relativitätspostulat auf relativ zu einander ungleichförmig bewegte Koordinatensysteme auszudehnen ist.**

— *Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie, in ihrer Entwicklung dargestellt* (1919–1920), bedoeld voor Nature maar nooit gepubliceerd (nu in Pierpont Morgan Library, New York).

Galilei: alles valt met dezelfde versnelling (in hetzelfde zwaartekrachtsveld)



Waarom?

Newton's antwoord: trage massa = zware massa

Tweede wet
van Newton

$$F = m_i a$$

m_i = **trage massa**
= weerstand
tegen
versnelling

Zwaartekracht
op aarde

$$F = m_g g$$

m_g = **zware massa**
= gevoeligheid
voor
zwaartekracht

valversnelling:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

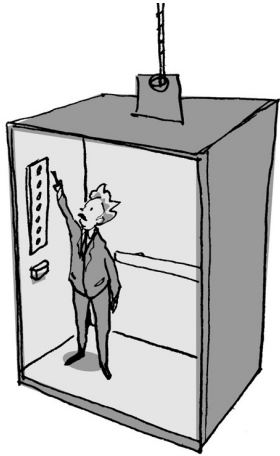
Kogels vallend van de scheve toren van Pisa

$$m_i a = m_g g$$

Conclusie: als $m_i = m_g$ dan is $a = g$

Waarom is trage massa gelijk aan zware massa? Equivalentie principe: versnelling en zwaartekracht zijn twee kanten van dezelfde medaille.

Voorbeelden van het equivalentie principe:



in rust

voelt
niet
hetzelfde

versneld



Generalisatie van het
relativiteitsprincipe
van eenparige naar
versnelde beweging?

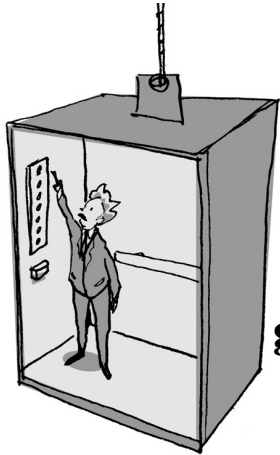
versneld

voelt
niet
hetzelfde

in rust



Voorbeelden van het equivalentie principe



**in rust
met
gravitatieveld**



**versneld
zonder
gravitatieveld**



**versneld
met
gravitatieveld**



**in rust
zonder
gravitatieveld**



Einsteins merkwaardige algemene relativiteitsprincipe: twee waarnemers in versnelde beweging ten opzichte van elkaar kunnen allebei volhouden in rust te zijn zolang het niet uitmaakt dat ze het oneens zijn of er al dan niet een gravitatieveld is.

Einsteins merkwaardige algemene relativiteitsprincipe op basis van het equivalentieprincipe: twee waarnemers in versnelde beweging ten opzichte van elkaar kunnen allebei volhouden in rust te zijn zolang het niet uitmaakt dat ze het oneens zijn of er al dan niet een gravitatieveld is.

Dat is geen relativiteit van beweging maar relativiteit van het gravitatieveld!

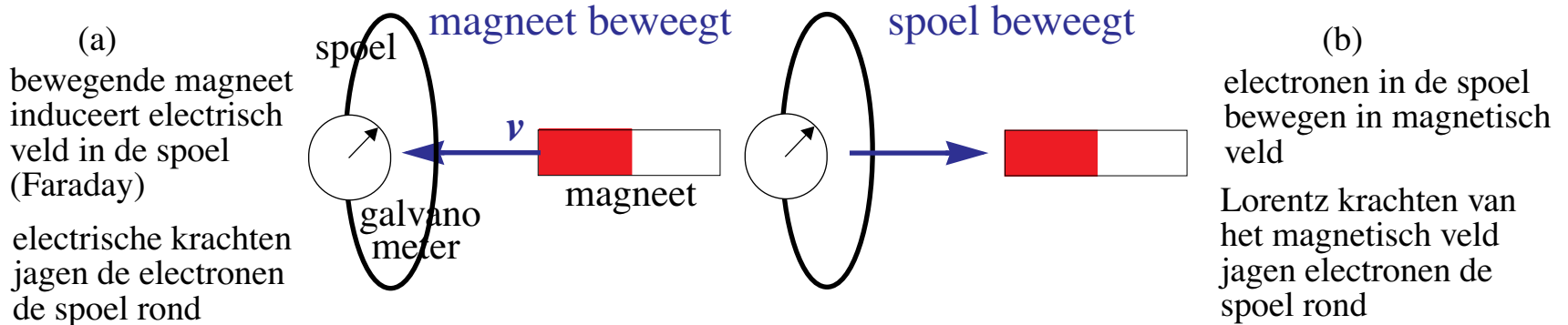
Relativiteit van beweging: “... das Relativitätspostulat auf relativ zu einander ungleichförmig bewegte Koordinatensysteme auszudehnen ...”

Relativiteit van het gravitatieveld: “Das Gravitationsfeld hat an einem betrachteten in ähnlicher Weise nur eine relative Existenz wie das durch magnetelektrische Induktion erzeugte elektrische Feld.”

— *Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie, in ihrer Entwicklung dargestellt* (1919–1920)

“Das Gravitationsfeld hat an einem betrachteten in ähnlicher Weise nur eine relative Existenz wie das durch magnetelektrische Induktion erzeugte elektrische Feld.”

Einsteins spoel-magneet redenering in SRT



De stroom is hetzelfde in de twee situaties
maar de verklaring van die stroom is heel verschillend

Einsteins conclusie: het elektrisch veld en het magnetisch veld zijn niet twee naast elkaar bestaande velden maar maken deel uit van één electromagnetisch veld dat op verschillende manieren uiteenvalt in een elektrische en een magnetische component al naar gelang de bewegingstoestand van de waarnemer (“relativiteit van het electromagnetisch veld”)

Voor de spoel en de magneet: vanuit de magneet gezien is er alleen een magnetische component; vanuit de spoel gezien is er zowel een magnetische als een elektrische component.

“Das Gravitationsfeld hat an einem betrachteten in ähnlicher Weise nur eine relative Existenz wie das durch magnetelektrische Induktion erzeugte elektrische Feld.”

SRT: het **electrisch veld** en het **magnetisch veld** zijn niet twee naast elkaar bestaande velden maar maken deel uit van één **electromagnetisch veld** dat op verschillende manieren uiteenvalt in een elektrische en een magnetische component al naar gelang de bewegingstoestand van de waarnemer (“**relativiteit van het electromagnetisch veld**”)

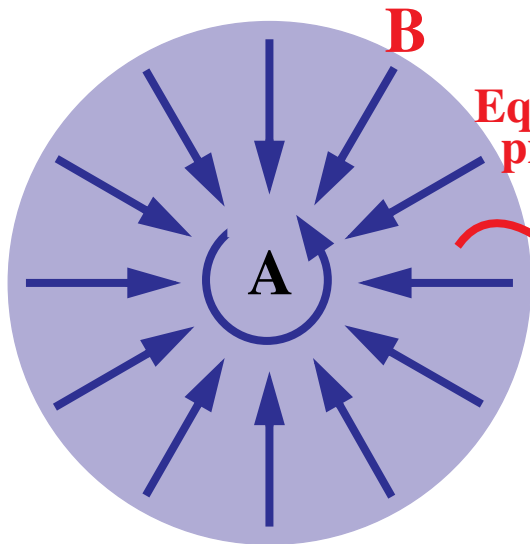
ART: het **inertiële veld** (verantwoordelijk voor de effecten van versnelling) en het **gravitatieveld** zijn niet twee naast elkaar bestaande velden maar maken deel uit van één **inertio-gravitationeel veld** dat op verschillende manieren uiteenvalt in een inertiële en een gravitationele component al naar gelang de bewegingstoestand van de waarnemer (“**relativiteit van het inertio-gravitationele veld**”)

Einsteins volwassen equivalentieprincipe (1918)

De heuristische waarde van het equivalentie principe: de roterende schijf

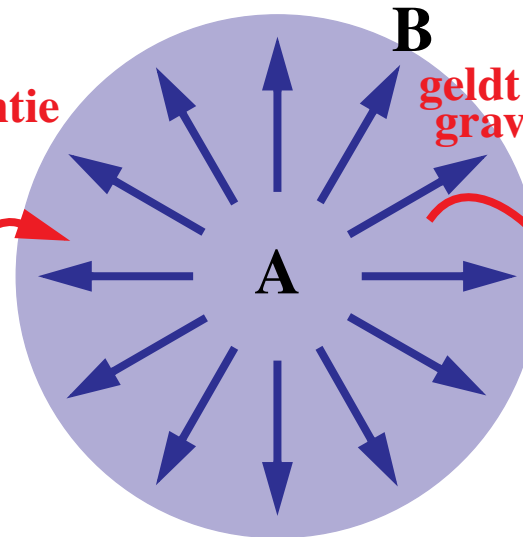
Gravitationele roodverschuiving

roterende schijf
(centripetale
versnelling)



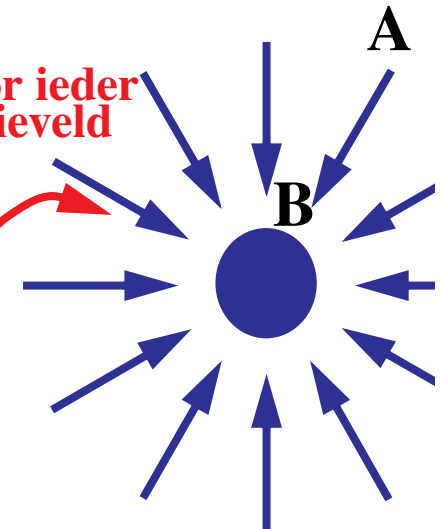
Tijddilatatie in SRT: **klok B** op de rand van de schijf loopt langzamer dan **klok A** in het centrum

schijf met radieel
gravitatieveld



Klok B, 'lager' in het gravitatieveld, loopt langzamer dan **klok A**

gravitatieveld
van de zon



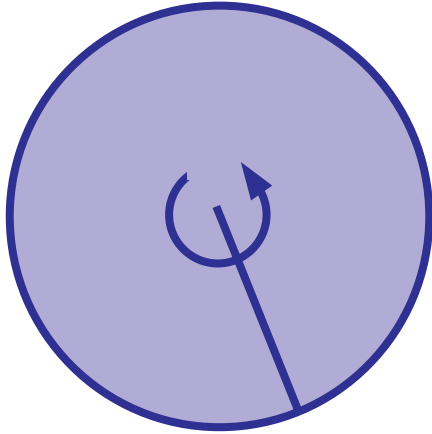
Trillingen in **atoom B**, 'lager' in het gravitatieveld, zijn langzamer dan trillingen van **atoom A** → roodverschuiving van licht van de zon.

Equivalentie
principe

geldt voor ieder
gravitatieveld

De heuristische waarde van het equivalentie principe: de roterende schijf

De ruimtelijke geometrie in aanwezigheid van een gravitatieveld is niet-Euklidisch.



Voor waarnemer naast de schijf:
omtrek \div straal = 2π (Euklidisch)

Voor waarnemer op de schijf:
omtrek \div straal $> 2\pi$ (niet-Euklidisch)*

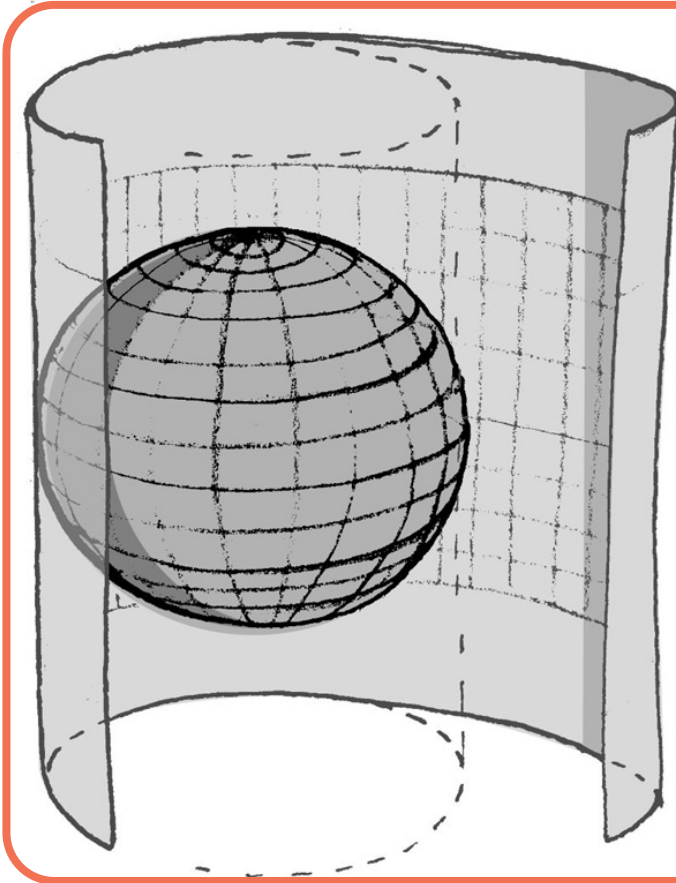
*Vanwege lengtecontractie in SRT. De waarnemer op de schijf meet de omtrek (maar niet de straal) met gekrompen linealen en vindt dus een te grote omtrek.

Ruimtelijke geometrie voor een versnelde waarnemer in SRT is niet-Euklidisch
 → **Ruimtelijke geometrie in een gravitatieveld is niet-Euklidisch**

Equivalentieprincipe

Einstein's analyse van de roterende schijf bracht hem op het idee dat gravitatie niets anders is dan kromming van ruimte-tijd

Zwaartekracht als kromming van ruimte-tijd. SRT: vlakke Minkowski ruimte-tijd; ART: gekromde ruimte-tijd: de beschrijving van 4D gekromde ruimte-tijd is volledig analoog aan de beschrijving van een gekromd 2D oppervlak.



Voorbeeld: simple kaart van de aarde

- projecteer de aardbol radieel op een cylinder.
- rol de cylinder uit en voorzie het van een raster waarmee ieder punt op de aardbol twee unieke coördinaten krijgt
- bepaal voor ieder punt de omrekeningsfactoren (oost-west, noord-zuid, etc.) van coördinaten afstanden (afstanden op de kaart) naar intrinsieke afstanden (afstanden op de aardbol).
- de omrekeningsfactoren heten de componenten van de metriek (notatie: $g_{\mu\nu}$).

De waarden van $g_{\mu\nu}$ verschillen van punt to punt (de oost-west omrekeningsfactor is groter voor punten bij de equator dan voor punten bij de polen)

Het metrisch veld, het veld van omrekeningsfactoren, heeft een dubbele functie: het bepaalt de meetkunde van ruimte-tijd en het geeft de potentiaal voor het gravitationele veld. Het metrisch veld is het inertio-gravitationele veld.

Zwaartekracht als kromming van ruimte-tijd. Terminologie:

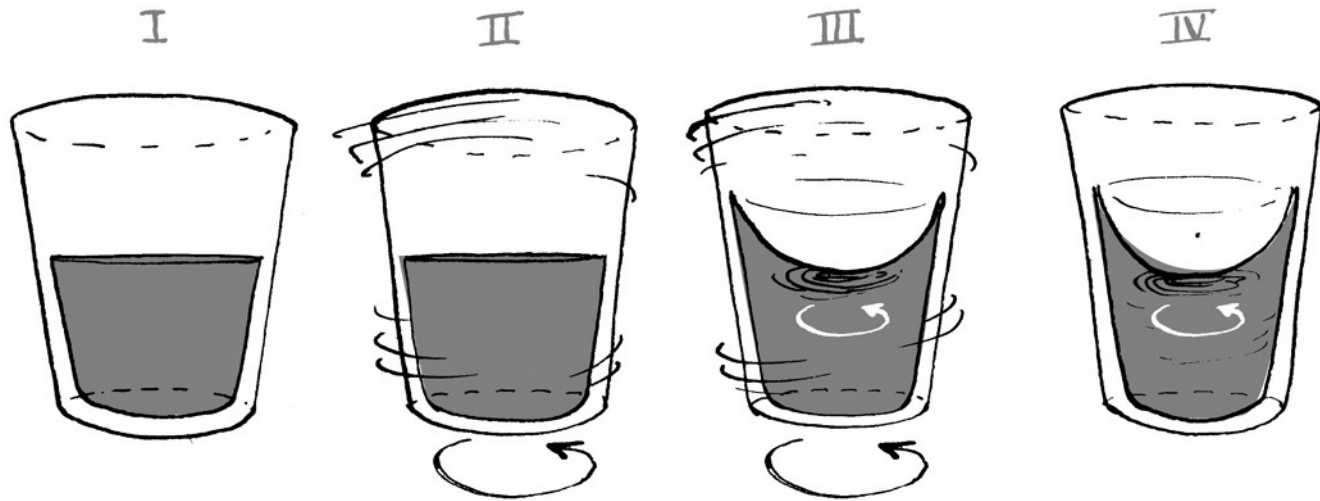
Algemene covariantie: 4D gekromde ruimte-tijd kan worden beschreven in willekeurige coördinaten en de bijbehorende waarden van het metrisch tensorveld (voor de omrekening van coördinaten afstanden naar intrinsieke afstanden). Een beschrijving die hetzelfde is in ieder coördinaten stelsel heet algemeen covariant. Pas in september 1916, in discussies met De Sitter, ziet Einstein in dat algemene covariantie nog niet betekent dat alle beweging — versneld of eenparig — nu relatief is.

Geodeten: de meest rechte lijnen in een gekromde ruimte(-tijd)

Implementatie van de relativiteit van het inertio-gravitationele veld: een waarnemer die een geodeet in ruimte-tijd volgt (voorbeelden: zwevend ver weg van graviterende massa; in vrije val in een gravitatieveld) ziet een puur inertiaal veld; een waarnemer die geen geodeet volgt ziet ook een gravitatieveld (voorbeelden: versnellend ver weg van graviterende massa; succesvol verzet tegen de aantrekking van de zwaartekracht)

Veldvergelijkingen: wetten die bepalen hoe materie het metrisch veld beïnvloedt.

Een obstakel voor het afschaffen van absolute beweging: Newtons emmer



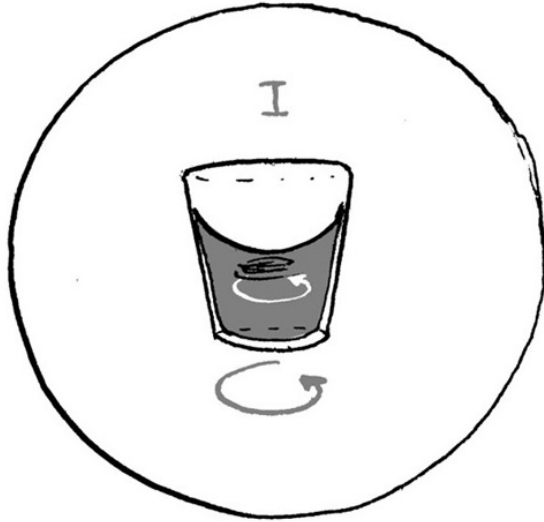
| | | | | |
|---------------------------|------------|-----------|------------|-----------|
| Emmer | in rust | draaiend | draaiend | in rust |
| Water | in rust | in rust | draaiend | draaiend |
| Relatieve rotatie? | NEE | JA | NEE | JA |

Conclusie: de concave vorm van het wateroppervlak kan niet worden verklaard in termen van de relatieve rotatie van het water ten opzichte van de emmer.

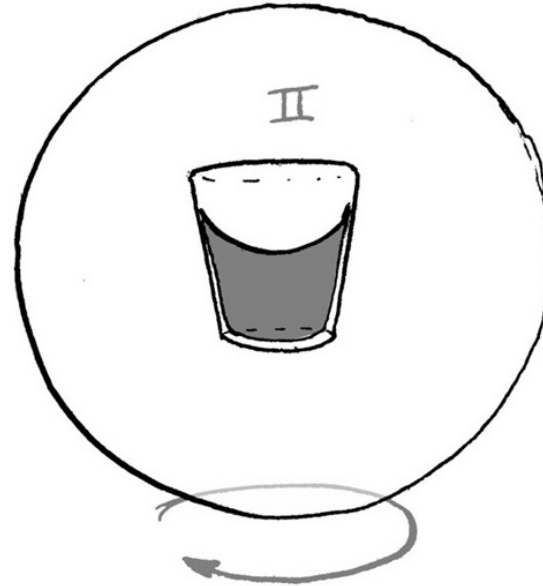
Vraag: maar wat is dan verantwoordelijk voor de concave vorm van het wateroppervlak?

Newtons antwoord: de rotatie van het water ten opzichte van de absolute ruimte.

Mach, Einstein en Newtons emmer



Emmer en water draaiend
schil en aarde in rust



Emmer en water in rust
schil en aarde draaiend

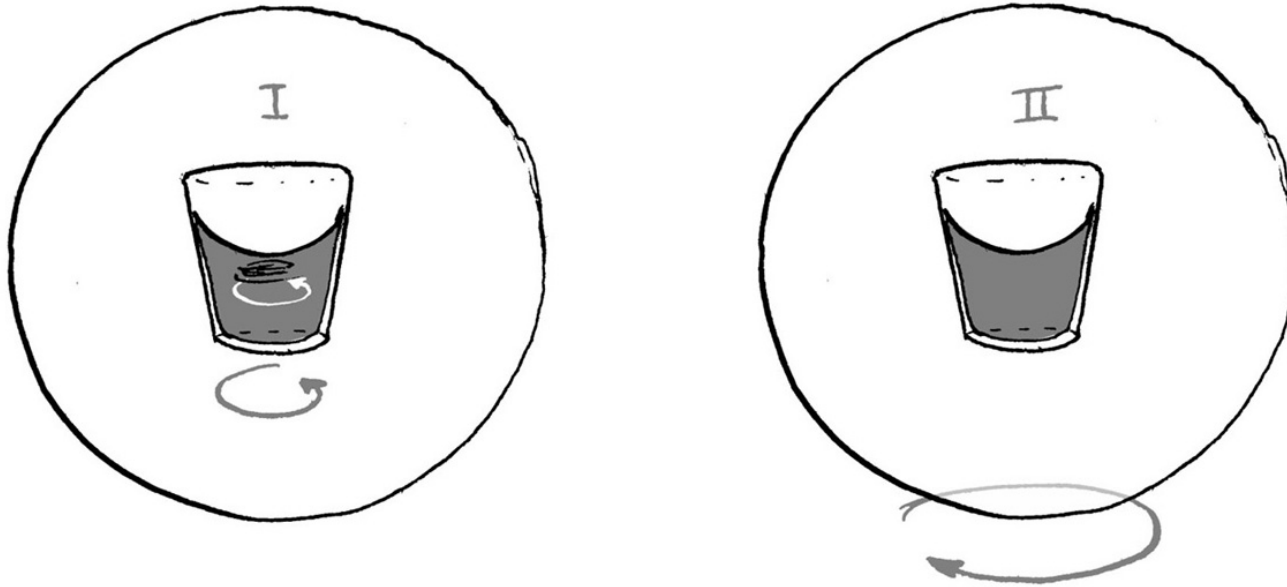
Vraag: wat is verantwoordelijk voor de concave vorm van het wateroppervlak?

Mach-Einstein: de rotatie van het water ten opzichte van de sterren (voorgesteld door een grote bolvormige schil). Situaties I en II zijn equivalent.

Bezwaar: in Newtons theorie zijn situaties I en II *niet* equivalent. Het oppervlak van water in een emmer in rust in het centrum van de draaiende schil blijft gewoon vlak.

Einsteins reactie (1913–1915): jammer voor Newtons theorie: in mijn theorie zijn situaties I en II wel equivalent.

Twee eisen waaraan Einsteins theorie moet voldoen om ervoor te zorgen dat situaties I en II een en dezelfde situatie zijn gezien vanuit verschillend gezichtspunt.

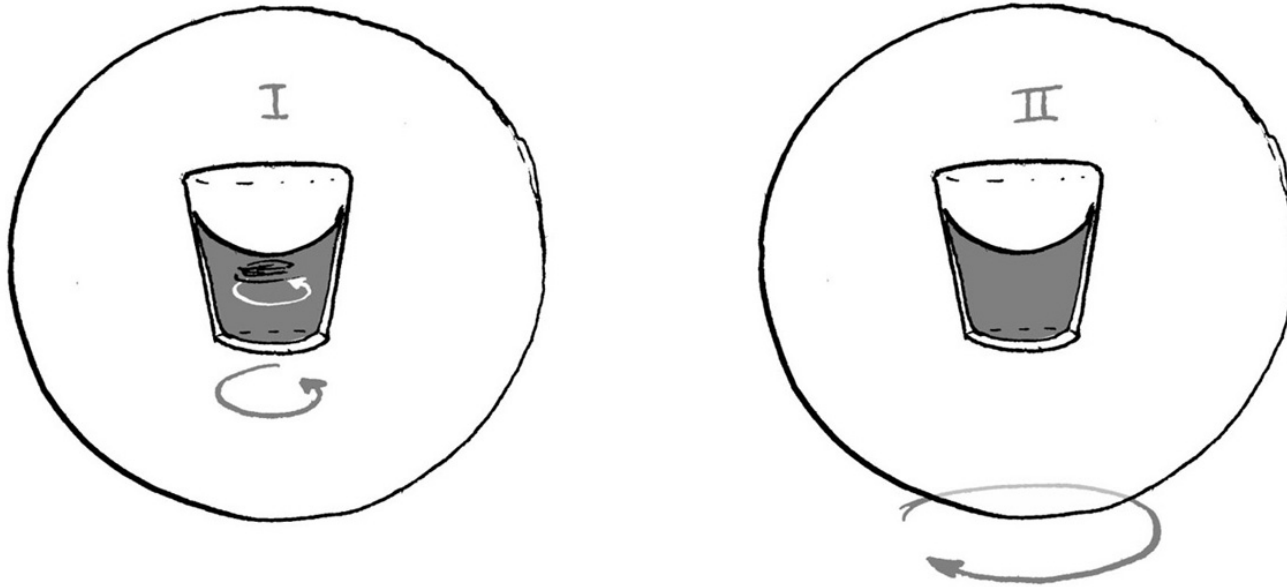


1. De centrifugale kracht die het water de zijkant van de emmer opstuwt moet kunnen worden opgevat als een kracht uitgeoefend door een zwaartekrachtsveld.

De potentiaal van dit veld is het metrisch veld van Minkowski ruimte-tijd [kortweg: Minkowski metriek] in roterende ruimte-tijd coördinaten.

Ergo: De Minkowski metriek in roterende coördinaten moet een oplossing zijn van de gravitationele veldvergelijkingen.

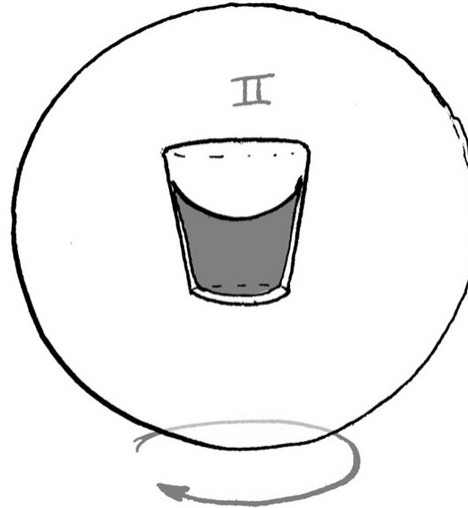
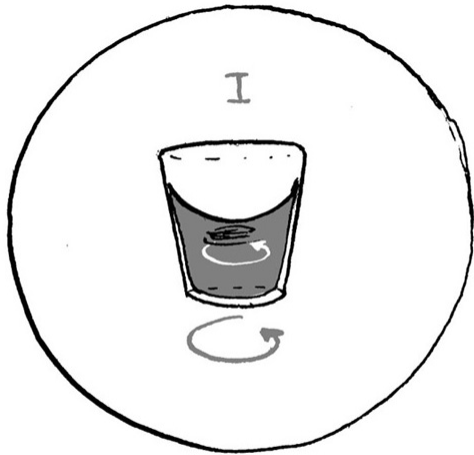
Twee eisen waaraan Einsteins theorie moet voldoen om ervoor te zorgen dat situaties I en II een en dezelfde situatie zijn gezien vanuit verschillend gezichtspunt.



- 1. De Minkowski metriek in roterende coördinaten moet een oplossing zijn van de gravitationele veldvergelijkingen.**
- 2. Dat zwaartekrachtsveld moet tevens het zwaartekrachtsveld zijn van een roterende bolvormige schil in de buurt van de emmer.**

Einsteins theorie voldoet aan eis (1) [dankzij algemene covariantie] maar niet aan eis (2). In 1916 verkeert Einstein in de veronderstelling dat automatisch aan eis (2) voldaan is zodra voldaan is aan eis (1).

Twee eisen waaraan Einsteins theorie moet voldoen om ervoor te zorgen dat situaties I en II een en dezelfde situatie zijn gezien vanuit verschillend gezichtspunt.



Einsteins stilzwijgende aannamen over randvoorwaarden in het oneindige

Situatie 1 (gezien vanuit schil): Minkowski metriek in niet-roterende coördinaten; sterren vormen een boloppervlak in rust zonder ‘aan elkaar vast te zitten’.

Situatie 2 (gezien vanuit emmer): Minkowski metriek in niet-roterende coördinaten; sterren moeten ‘aan elkaar vast zitten’ om roterend boloppervlak te vormen; anders vliegen ze onder invloed van centrifugale krachten uit elkaar.

Situatie 1 (gezien vanuit emmer): Minkowski metriek in roterende coördinaten: sterren vormen roterend boloppervlak en worden door zwaartekrachtsveld bij elkaar gehouden.

Conclusie: Situatie 2 is iets heel anders dan situatie 1 gezien vanuit emmer (Mach en Einstein doen net alsof water, emmer, aarde, en schil het hele systeem vormen, maar het metrische veld is er ook nog).

De Sitter wijst Einstein erop dat je nog steeds absolute ruimte-tijd hebt als je aanneemt dat het metrisch veld in het oneindige de waarden van de Minkowski metriek heeft.

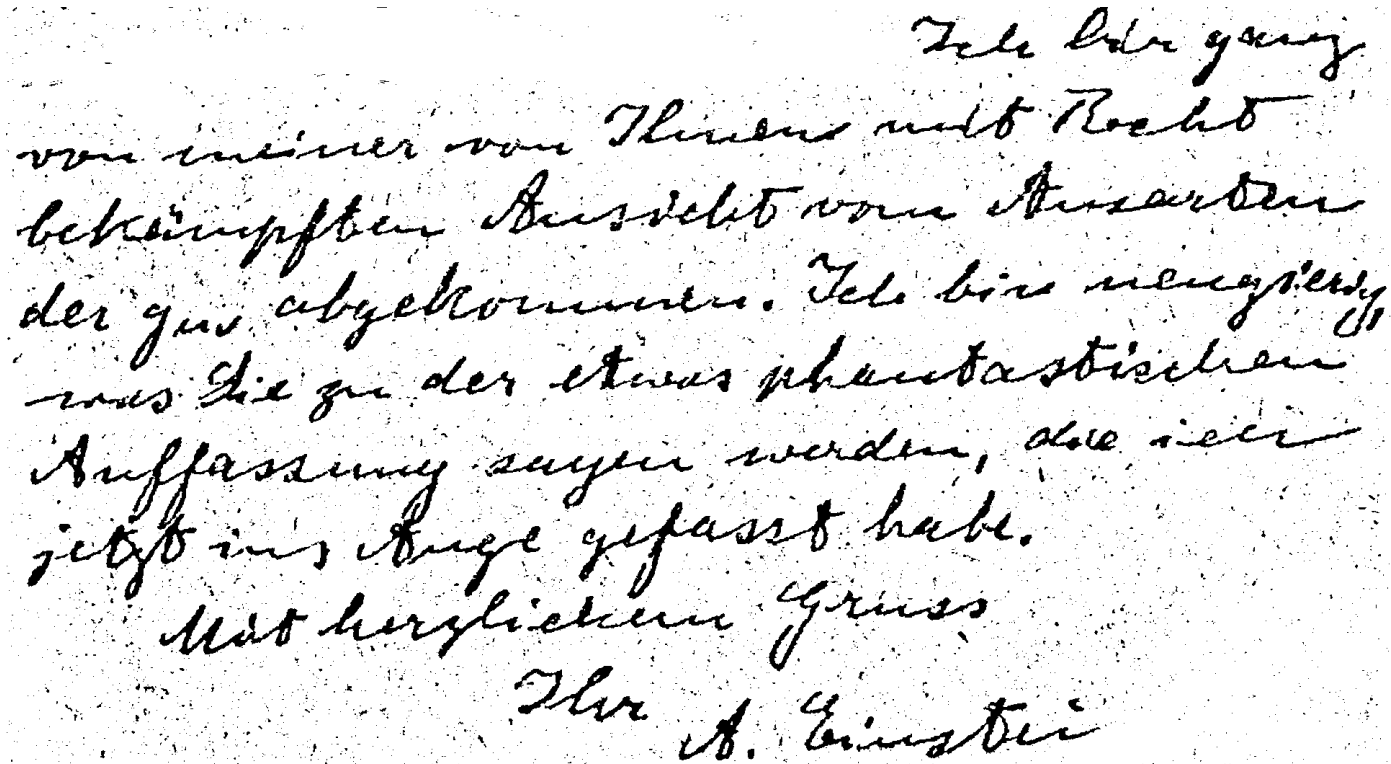
Einsteins oplossing: veronderstel dat het metrisch veld in het oneindige ontaarde waarden heeft (nul of oneindig) en dat zich buiten het zichtbare heelal massa's bevinden die ervoor zorgen dat het metrisch veld aan de rand van het zichtbare heelal de waarden van de Minkowski metriek krijgen.

De Sitters bezwaren: het middel (onzichtbare massa's) is erger dan de kwaal (absolute versnelling)

Zie de eerste brieven (van november 1916) van het Einstein-De Sitter debat na Einsteins bezoek van twee weken aan Leiden eind september/begin oktober; en een artikel van De Sitter, “[De relativiteit der rotatie in de theorie van Einstein.](#)” Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis- en Natuurkundige Afdeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen 25 (1916–17): 499–504.

Einsteins nieuwe idee: weg met het oneindige!

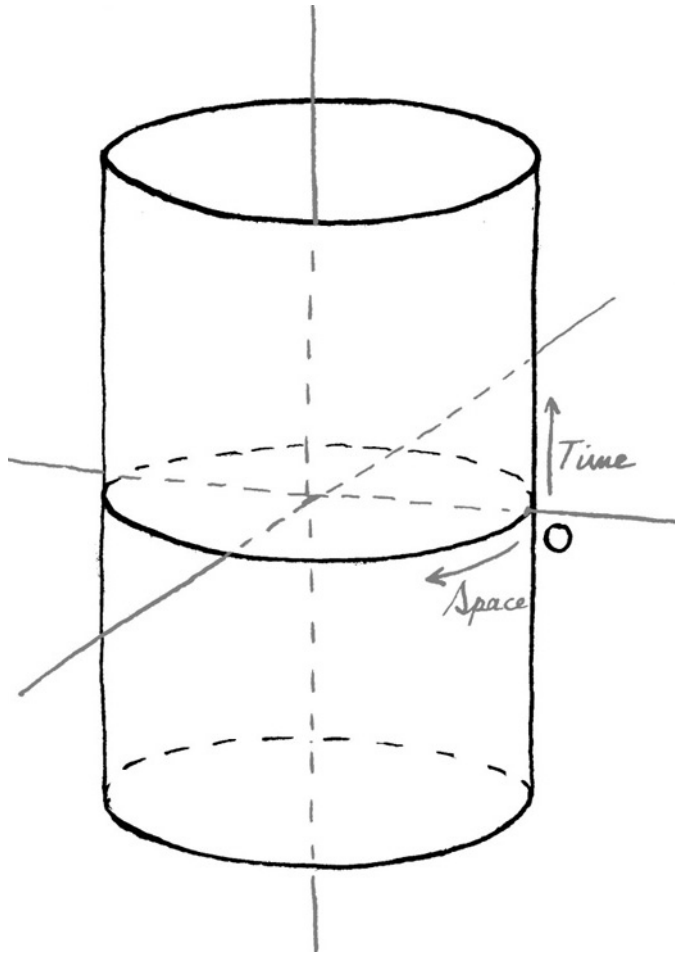
Einstein aan De Sitter, 2 februari 1917: “Ich bin ganz von meiner von Ihnen mit Recht bekämpften Ansicht vom Ausarten der $g_{\mu\nu}$ abgekommen. Ich bin neugierig, was Sie zu der etwas phantastischen Auffassung sagen werden, die ich jetzt ins Auge gefasst habe.”



Teleskop
 Ich bin ganz
 von meiner von Ihnen mit Recht
 bekämpften Ansicht vom Ausarten
 der $g_{\mu\nu}$ abgekommen. Ich bin neugierig,
 was Sie zu der etwas phantastischen
 Auffassung sagen werden, die ich
 jetzt ins Auge gefasst habe.
 Mit herzlichem Gruss
 Ihr A. Einstein

Einsteins nieuwe idee: randvoorwaarden in het oneindige kunnen worden geëlimineerd door het oneindige zelf te elimineren: neem aan dat het heelal ruimtelijk gesloten is (zoals het oppervlak van een bol maar dan drie-dimensionaal in plaats van twee-dimensionaal).

Einsteins kosmologische model (het ‘cylinder heelal’) en de kosmologische konstante:



Vraag: is het metrisch veld $g_{\mu\nu}$ voor Einsteins cylinder heelal een oplossing van de veldvergelijkingen van November 1915?

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)?$$

[Lees: kromming ($R_{\mu\nu}$) = materiële bronnen ($T_{\mu\nu}$)]

Antwoord: NEE! Dit metrisch veld is alleen een oplossing als (a) een extra term — de beruchte kosmologische term met de **kosmologische konstante** λ — wordt toegevoegd:

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

en (b) aan de relatie $\lambda = \frac{1}{R^2} = \frac{\kappa\rho}{2}$ is voldaan.

[R = straal van het heelal, ρ = massa dichtheid, κ = Einstein's gravitationele konstante]. **Het cylinder heelal moet dus tjokvol zitten met massa.**

Hoe de kosmologische konstante te verkopen aan De Sitter?

De kosmologische term is nodig niet omdat Einsteins cylinder heelal ruimtelijk gesloten is maar omdat het statisch is. De kosmologische term levert een afstotende kracht op, een soort negatieve zwaartekracht, die voorkomt dat het cylinder heelal implodeert.

Zo'n zelfde term is nodig in een statisch heelal in Newtons theorie.

Dat is een goed argument om De Sitters kritiek voor te zijn dat Einsteins nieuwe konstante (net als zijn eerdere massa's buiten het zichtbare deel van het heelal) er alleen maar toe dient om het stokpaardje van Mach te redden.

Hoe de kosmologische konstante te verkopen aan De Sitter?

Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

VON A. EINSTEIN.

Es ist wohlbekannt, daß die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \quad (1)$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes die Newtonsche Fernwirkungstheorie noch nicht vollständig ersetzt. Es muß noch die Bedingung hinzutreten, daß im räumlich Unendlichen das Potential ϕ einem festen Grenzwerte zustrebt. Analog verhält es sich bei der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität; auch hier müssen zu den Differentialgleichungen Grenzbedingungen hinzutreten für das räumlich Unendliche, falls man die Welt wirklich als räumlich unendlich ausgedehnt anzusehen hat.

Bei der Behandlung des Planetenproblems habe ich diese Grenzbedingungen in Gestalt folgender Annahme gewählt: Es ist möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, daß sämtliche Gravitationspotentiale g_{μ} im räumlich Unendlichen konstant werden. Es ist aber a priori durchaus nicht evident, daß man dieselben Grenzbedingungen ansetzen darf, wenn man größere Partien der Körperwelt ins Auge fassen will. Im folgenden sollen die Überlegungen angegeben werden, welche ich bisher über diese prinzipiell wichtige Frage angestellt habe.

§ 1. Die Newtonsche Theorie.

Es ist wohlbekannt, daß die Newtonsche Grenzbedingung des kon-

144 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 8. Februar 1917

der an sich nicht beansprucht, ernst genommen zu werden; er dient nur dazu, das Folgende besser hervortreten zu lassen. An die Stelle der Poissonschen Gleichung setzen wir

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho, \quad (2)$$

wobei λ eine universelle Konstante bedeutet. Ist ρ die (gleichmäßige) Dichte einer Massenverteilung, so ist

$$\phi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho. \quad (3)$$

eine Lösung der Gleichung (2). Diese Lösung entspräche dem Falle, daß die Materie der Fixsterne gleichmäßig über den Raum verteilt wäre, wobei die Dichte ρ gleich der tatsächlichen mittleren Dichte der Materie des Weltraumes sein möge. Die Lösung entspricht einer unendlichen Ausdehnung des im Mittel gleichmäßig mit Materie erfüllten Raumes. Denkt man sich, ohne an der mittleren Verteilungsdichte etwas zu ändern, die Materie örtlich ungleichmäßig verteilt, so wird sich über den konstanten ϕ -Wert der Gleichung (3) ein zusätzliches ϕ überlagern, welches in der Nähe dichter Massen einem Newtonschen Felde um so ähnlicher ist, je kleiner λ , gegenüber $4\pi K\rho$ ist.

Eine so beschaffene Welt hätte bezüglich des Gravitationsfeldes keinen Mittelpunkt. Ein Abnehmen der Dichte im räumlich Unendlichen müßte nicht angenommen werden, sondern es wäre sowohl das mittlere Potential als auch die mittlere Dichte bis ins Unendliche konstant. Der bei der Newtonschen Theorie konstatierte Konflikt mit der statistischen Mechanik ist hier nicht vorhanden. Die Materie ist bei einer bestimmten (äußerst kleinen) Dichte im Gleichgewicht, ohne daß für dies Gleichgewicht innere Kräfte der Materie (Druck) nötig wären.

Albert Einstein, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie." *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte* (1917): 142–152

Hoe de kosmologische konstante te verkopen aan De Sitter?

EINSTEIN: Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie 151

müßten wir wohl schließen, daß die Relativitätstheorie die Hypothese von einer räumlichen Geschlossenheit der Welt nicht zulasse.

Das Gleichungssystem (14) erlaubt jedoch eine naheliegende, mit dem Relativitätspostulat vereinbare Erweiterung, welche der durch Gleichung (2) gegebenen Erweiterung der Poissonschen Gleichung vollkommen analog ist. Wir können nämlich auf der linken Seite der Feldgleichung (13) den mit einer vorläufig unbekanntem universellen Konstante $-\lambda$ multiplizierten Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hinzufügen, ohne daß dadurch die allgemeine Kovarianz zerstört wird; wir setzen an die Stelle der Feldgleichung (13)

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (13a)$$

Auch diese Feldgleichung ist bei genügend kleinem λ mit den am Sonnensystem erlangten Erfahrungstatsachen jedenfalls vereinbar. Sie befriedigt auch Erhaltungssätze des Impulses und der Energie, denn man gelangt zu (13a) an Stelle von (13), wenn man statt des Skalars des RIEMANNschen Tensors diesen Skalar, vermehrt um eine universelle Konstante, in das HAMILTONsche Prinzip einführt, welches Prinzip ja die Giltigkeit von Erhaltungssätzen gewährleistet. Daß die Feldgleichung (13a) mit unseren Ansätzen über Feld und Materie vereinbar ist, wird im folgenden gezeigt.

Einstein stuurt De Sitter zijn "Kosmologische Betrachtungen" (begin maart 1917)

Einstein aan De Sitter, begin maart 1917: "Nun zu unserer Sache! Vom Standpunkte der Astronomie ist es natürlich ein geräumiges Luftschloss, das ich da gebaut habe. Aber für mich war die Frage brennend, ob sich der Relativitäts-Gedanke fertig ausspinnen lässt, oder ob er auf Widersprüche führt. Ich bin nun zufrieden, dass ich den Gedanken habe zu Ende denken können, ohne auf Widersprüche zu kommen. Jetzt plagt mich das Problem nicht mehr, während es mir vorher keine Ruhe liess. Ob das Schema, das ich mir bildete, der Wirklichkeit entspricht, ist eine andere Frage"

Nun zu unserer Sache! Vom Standpunkte der Astronomie ist es natürlich ein geräumiges Luftschloss, das ich da gebaut habe. Aber für mich war die Frage brennend, ob sich der Relativitäts-Gedanke fertig ausspinnen lässt, oder ob er auf Widersprüche führt. Ich bin nun zufrieden, dass ich den Gedanken habe zu Ende denken können, ohne auf Widersprüche zu kommen. Jetzt plagt mich das Problem nicht mehr, während es mir vorher keine Ruhe liess. Ob das Schema, das ich mir bildete, der Wirklichkeit entspricht, ist eine andere Frage.

De Sitters reactie (15 maart 1917)

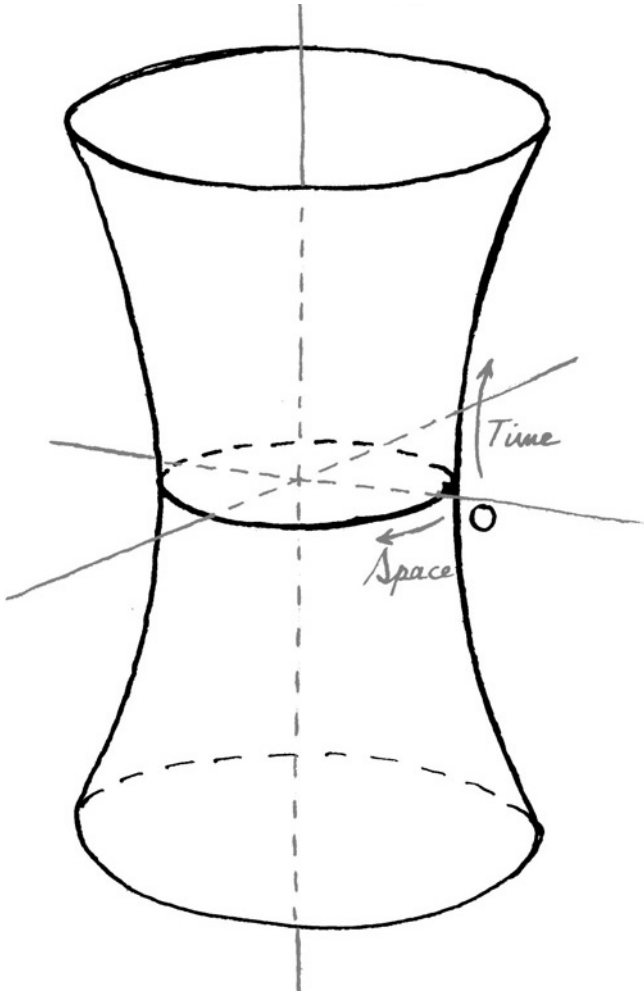
Leiden 15 März 1917

Lieber Kollege

Vielen Dank für Ihren liebenswürdigen Brief. Ja, wenn Sie Ihre Auffassung nur der Wirklichkeit nicht aufzwingen wollen, dann sind wir einig. Als widerspruchslöse Gedankenreihe habe ich nichts dagegen, und bewundere ich sie. Ganz und gar zustimmen kann ich nicht, bevor ich damit gerechnet habe, was mir jetzt nicht möglich ist.

“Vielen Dank für ihren liebenswürdigen Brief. Ja, wenn Sie ihre Auffassung nur der Wirklichkeit nicht aufzwingen wollen, dann sind wir einig. Als widerspruchslöse Gedankenreihe habe ich nichts dagegen, und bewundere ich sie. Ganz und gar zustimmen kann ich nicht, bevor ich damit gerechnet habe, was mir jetzt nicht möglich ist.”

Nog geen week later (20 maart 1917): De Sitter komt met zijn eigen kosmologische model, het ‘hyperboloïde heelal’



Redenering (naar een suggestie van Ehrenfest)):

- De ruimtelijke geometrie van Einsteins cylinder heelal is een 3D hyperbol met straal R in 4D Euklidische ruimte (met coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4):

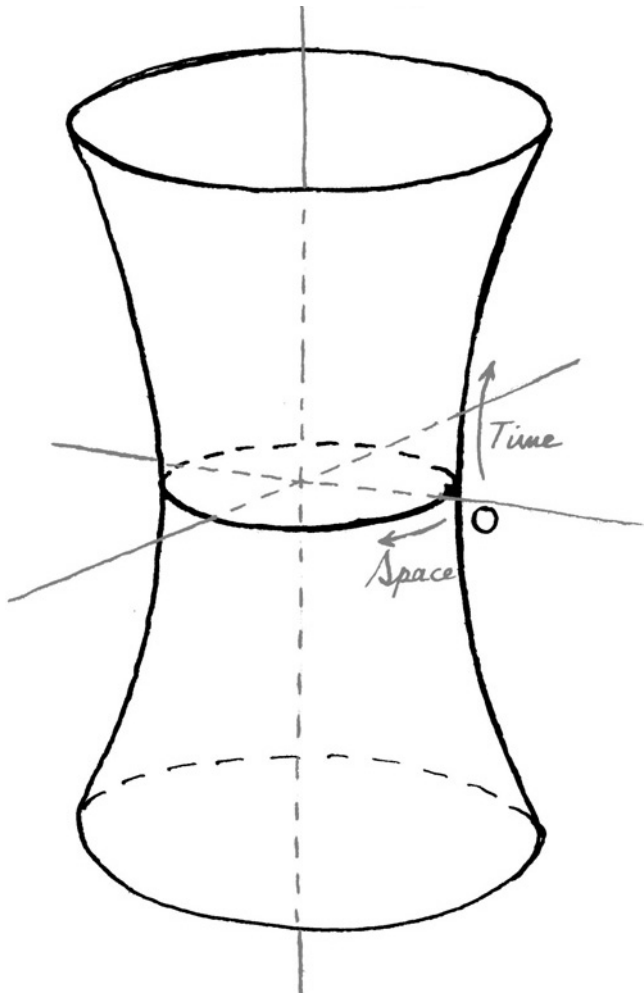
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

- Construeer de ruimte-tijd geometrie van een 4D hyper-hyperboloïde* met straal R in a 5D Minkowski ruimte-tijd (met coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4, ct)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - c^2 t^2 = R^2$$

*Een hyperboloïde in 3D Minkowski ruimte-tijd is het analogon van een bol in 3D Euklidische ruimte.

Nog geen week later (20 maart 1917): De Sitter komt met zijn eigen kosmologische model, het ‘hyperboloïde heelal’



Vraag: is het metrisch veld $g_{\mu\nu}$ voor De Sitters hyperboloïde heelal een oplossing van de veldvergelijkingen met kosmologische konstante?

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)?$$

Antwoord: JA, zolang voldaan is aan de relaties $\lambda = 3/R^2$ en $\rho = 0$. **Anders dan Einsteins cylinder heelal is De Sitters hyperboloïde heelal dus helemaal leeg!**

De Sitter brengt rapport uit aan Einstein op 20 maart 1917 en stuurt het artikel met zijn resultaten naar de Akademie van Wetenschappen op 26 maart 1917.

De Sitter brengt rapport uit aan Einstein (20 maart 1917)

Leiden 20 Maart 1917

Lieber Herr Einstein

Ich habe gefunden, dass man den Gleichungen

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0$$

aber Ihre Gleichungen (13a) ohne Materie, gemessen kann durch die $g_{\mu\nu}$ die existieren sind durch

$$(1) \quad ds^2 = \frac{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2}{(1 - \mu h^2)^2}$$

$$\mu = \frac{\lambda}{12}, \quad h^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad x, y, z, t \text{ können so werden}$$

Im Unendlichen (entweder räumlich, oder zeitlich, oder beides) werden die $g_{\mu\nu}$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \right\}$$

Hier hat man also ein System von Integrationsconstanten, oder Randwerten im Unendlichen, das invariant ist gegen alle Transformationen. Für Krümmungen, d. i. in unserem räumlichen undzeitlichen Nähe, haben wir die $g_{\mu\nu}$ der alten Relativitätstheorie wenn μ (λ) nur klein genug ist. Dies ist erreicht ohne "konstruieren" Massen, nur durch Einführung der unbestimmten, und unbestimmbarer Konstante λ in den Feldgleichungen.

Ich weiss nicht ob man kann sagen dass auf diese Weise die Trägheit erklärt wird. Mit Erklärunges halte ich mich nicht auf. Wenn ein Probekörper allein in der Welt existierte, würde er Trägheit haben. In aber kein Sonne und Planeten da wären Ihre Theorie auch, wenn, u. l. die physikalischen Massen (Sonne etc.) nicht da wären. Wenn das ist konstruieren Massen nicht da wären -- das ist in Ihre Theorie eben unmöglich als zu sagen, wenn die Welt nicht da wäre!

Man kann (1) auch so interpretieren dass diese viel-dimensionale Welt endlich ist, mit Radius gleichbedeutend $\lambda = \frac{3}{R^2}$. Die Analyse mit Ihre Lösung geht hervor aus folgenden Versuchen:

De Sitter brengt rapport uit aan Einstein (20 maart 1917)

Dreidimensional

Mit ihrer natürlichen Masse.

$$\lambda = \frac{1}{R^2}$$

Coordinaten-System I.

$$x_1, x_2, x_3, ct: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$$

$$g_{44} = 1 \quad g_{ii} = 0 \quad g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Coordinaten-System II (Hypersphärische Koordinaten)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 [dx^2 + \sin^2 \chi (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2)]$$

$$-\infty < t < +\infty \quad 0 \leq \chi \leq 2\pi \quad 0 \leq \psi, \varphi \leq \pi$$

Coordinaten-System III

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}$$

$$\text{Im Unendlichen: } g_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Invariant gegen alle Transform. mit $t' = t$

$$g_{44} = 0 \quad g_{ii} = \frac{2}{R^2} g_{0i} \quad i = 1, 2, 3$$

Vierdimensional

Ohne jede Masse.

$$\lambda = \frac{3}{R^2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = ict: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \leq R^2$$

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \quad \begin{matrix} u \text{ und } v = \\ 1, 2, 3, 4 \end{matrix}$$

$$ds^2 = -R^2 [d\omega^2 + \sin^2 \omega \{dx^2 + \sin^2 \chi (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2)\}]$$

$$0 \leq \omega \leq 2\pi \quad 0 \leq \omega, \chi, \psi \leq \pi$$

(Cartesisch) {entsteht aus II durch eine „stereographische Projection“}

$$ds^2 = \frac{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2}{\left[1 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)\right]^2}$$

$$\text{Im Unendlichen: } g_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Invariant gegen alle Transform.

$$g_{ii} = \frac{1}{R^2} g_{0i} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

De Sitter publiceert zijn oplossing:

$$\left. \begin{array}{l} A \\ g_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{(1+\sigma r^2)^2} \\ g_{44} = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} B \\ g_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{(1+\sigma h^2)^2} \\ g_{44} = \frac{1}{(1+\sigma h^2)^2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Alle $g_{\mu\nu}$ buiten de diagonaal zijn nul. Als σ zeer klein is hebben, voor matige waarden van r en h , de $g_{\mu\nu}$ zeer nabij de waarden (1), en in het oneindige naderen ze tot de boven reeds gegeven waarden (2 A) en (2 B).

Om de betrekking tusschen σ en λ te vinden, moeten wij de waarden (5) substitueeren¹⁾ in de vergelijkingen (4). Daarbij moeten wij rekening houden met de eventueele noodzakelijkheid van het aannemen eener wereldmaterie. Wij verwaarloozen alle gewone materie, en deze wereldmaterie denken wij ons gelijkmatig²⁾ over de ruimte verdeeld en in rust, zoodat $T_{44} = g_{44}\varrho$ en alle andere $T_{\mu\nu} = 0$. De veldvergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} G_{ij} - (\lambda + \frac{1}{2}\kappa\varrho) g_{ij} &= 0, \\ G_{44} - (\lambda + \frac{1}{2}\kappa\varrho) g_{44} &= -\kappa\varrho. \end{aligned}$$

Voor de waarden van $G_{\mu\nu}$ vindt men in de beide stelsels

$$\left. \begin{array}{l} A \\ G_{ij} = 8\sigma g_{ij} \\ G_{44} = 0, g_{44} = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} B \\ G_{\mu\mu} = 12\sigma g_{\mu\mu} \end{array} \right\}$$

Hieruit volgt

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 4\sigma \\ \varrho = \frac{8\sigma}{\kappa} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda = 12\sigma \\ \varrho = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

“Over de relativiteit der traagheid: beschouwingen naar aanleiding van Einstein’s laatste hypothese” *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis- en Natuurkundige Afdeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen 25 (1916–1917): 1268–1276.*

Einsteins reactie

Einstein aan De Sitter, 24 maart 1917: “Es wäre nach meiner Meinung unbefriedigend, wenn es eine denkbare Welt ohne Materie gäbe. Das $g^{\mu\nu}$ -Feld soll vielmehr durch die Materie bedingt sein, ohne dieselbe nicht bestehen können. Das ist der Kern dessen, was ich unter der Forderung von der Relativität der Trägheit verstehe”

Es wäre nach meiner Meinung unbefriedigend, wenn es eine denkbare Welt ohne Materie gäbe. Das $g^{\mu\nu}$ -Feld soll vielmehr durch die Materie bedingt sein, ohne dieselbe nicht bestehen können. Das ist der Kern dessen, was ich unter der Forderung von der Relativität der Trägheit verstehe. Mein Kamm
 24. 3. 1917

Postscript in De Sitters artikel van maart 1917

Naschrift.

De heer EINSTEIN, wien ik den inhoud van het bovenstaande in het kort had medegedeeld, schrijft mij: „Es wäre nach meiner Meinung unbefriedigend, wenn es eine denkbare Welt ohne Materie gäbe. Das $g_{\mu\nu}$ -Feld soll vielmehr durch die Materie bedingt sein, ohne dieselbe nicht bestehen können. Das ist der Kern dessen, was ich unter der Forderung von der Relativität der Trägheit verstehe”.

De Sitters kanttekeningen bij Einsteins brief

keine physikalische Möglichkeit entspricht. Die g_{uv} und g^{uv} müssen überall (samt ihren ersten Ableitungen) stetig sein.

Es wäre nach meiner Meinung unbefriedigend, wenn es eine denkbare Welt ohne Materie gäbe. Das g^{uv} -Feld soll vielmehr durch die Materie bedingt sein, ohne dieselbe nicht bestehen können. Das ist der Kern dessen, was sich unter der Forderung von der Relativität der Trägheit versteht. Man kann auch ebensogut von der „materiellen Bedingtheit der Geometrie“ sprechen. Solange diese Forderung nicht erfüllt war, war für mich das Ziel der allgemeinen Relativität noch nicht ganz erreicht. Dies wurde durch das λ -Glied erst herbeigeführt.

Ihre sehr herzlich begrüßt von Ihrem

Schülerin.

P. G. Die Thatsache der geringen Sterneschwindigkeit ist ein Argument, dessen Beweiskraft mich insofern über die der Nichtexistenz der Lichtverschlebung geht, als man ^{hier} nicht auf ausschliessliche Wirkung des sichtbaren Teils der Sterne beschränkt ist. Unter der Voraussetzung eines mechanisch quasistationären Universums der Materie beweisen die geringen Sterneschwindigkeiten, dass grosse Potentialdifferenzen sehr ungewöhnlich in der Welt überhaupt nicht vorkommen.

ferner Sterne die λ -Frage entschieden werden. Denn wenn $\lambda = 0$ wäre, so würde der die instabilen Sternedichte berechnen, um eine Potentialdifferenz zu sehen und mich ferner Sterne herbeigeführen, die einem erheblichen Violett-Licht mit sich brächte.

Ihre Redebeurteilung in heulenaal font.
Kann man anders stellen dat de grond del de dichtheid hier, tot in $\lambda = 0$ zoo blijft dit in een zekere niet waars.

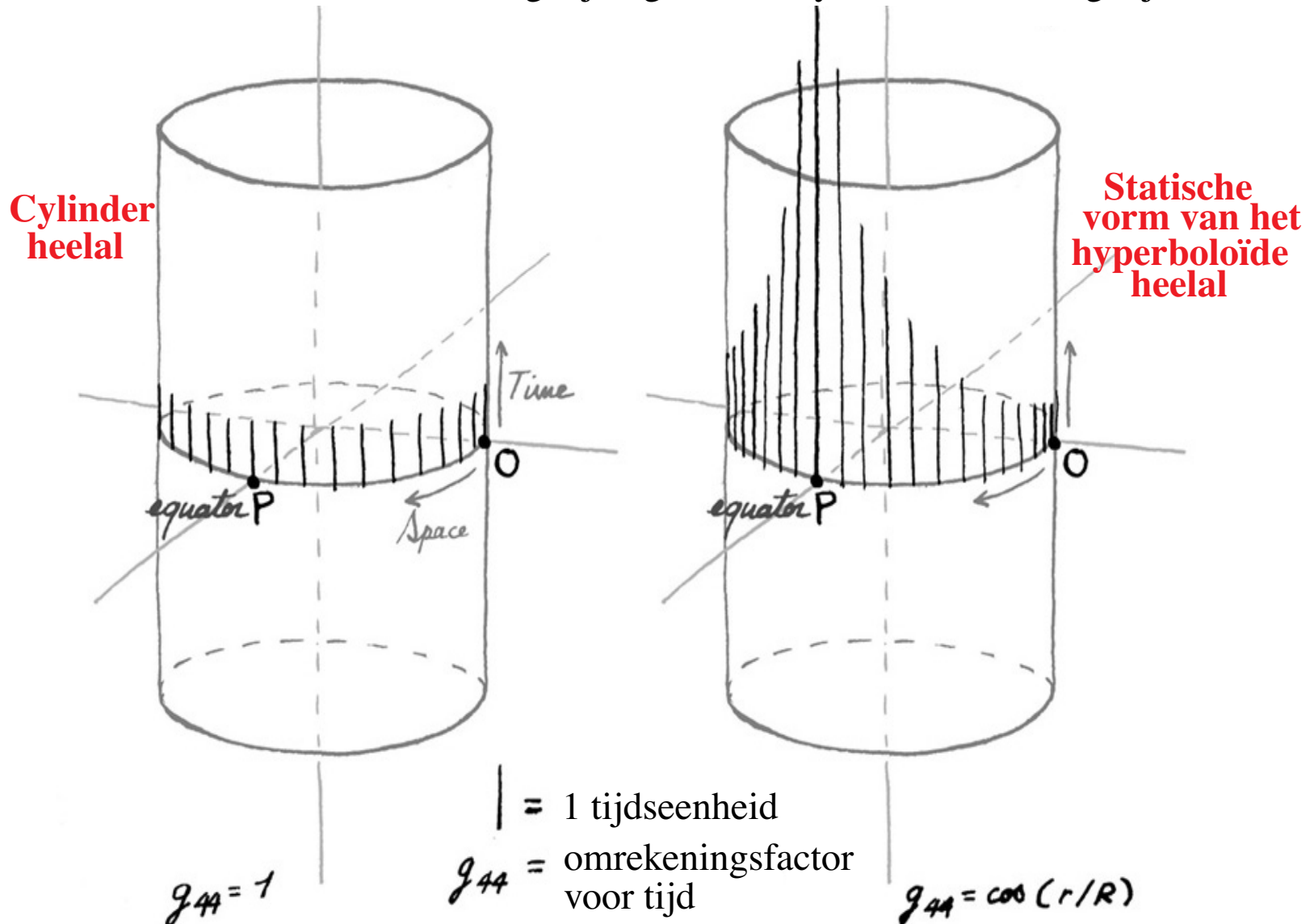
Intendant, en terna resultaat
M. N. II, p. 177 volgt dat, deels de
aanname over de verhouding van antwoord, zoo
 $m(R) < 600 R$

Nu is $\rho = \frac{1}{4\pi R^3}$ dan $\rho(R) < \frac{14}{R^2}$

Dit is de juiste conclusie met de obs, niet iets over λ .

De font zit hier

De statische vorm van de De Sitter oplossing: het hyperboloïde heelal in kaart gebracht op een manier die een interessante vergelijking met het cylinder heelal mogelijk maakt.



Einsteins poging te laten zien dat De Sitters hyperboloïde heelal niet leeg is en dus geen uitzondering vormt op Machs principe.

Einsteins doel: laten zien dat het vreemde gedrag van de omrekeningsfactor voor tijd in de statische vorm van het hyperboloïde heelal ($g_{44} = \cos(r/R) = 0$ voor $r = (\pi/2)R$) het effect is van een enorme hoeveelheid massa op de 'equator' P .

Einsteins redenering:

- Als de omrekeningsfactor voor tijd op de equator naar nul gaat betekent dat de klokken op de equator stil komen te staan.
- Klokken gaan langzamer lopen als je ze laat zakken in een gravitatieveld (gravitationele roodverschuiving).
- Om klokken oneindig langzaam te laten lopen is oneindig veel massa nodig.
- Kortom, op de equator in het hyperboloïde heelal moet zich oneindig veel massa bevinden.

Einsteins conclusie: Het hyperboloïde heelal is helemaal niet leeg! Het enige verschil met het cylinder heelal is dat de materie niet egaal verspreid is over het heelal maar geconcentreerd op de equator. Machs principe geldt zonder uitzondering.

De Sitters aantekeningen op een briefkaart van Einstein van 8 augustus 1917

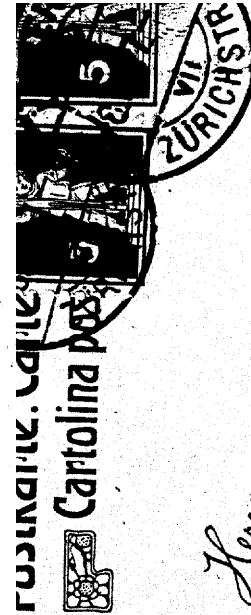
Lieber Kollege!

Ich freue mich sehr mit Ihren
ausführlichen und klaren Auseinander-
setzungen, die ich vollkommen
verstehe. Man kann zwischen den Fällen
A und B so eine Brücke schlagen:

B ist das g_{44} Feld einer Welt, in welcher
die Materie im „Äquator“ konzentriert ist,
während sie in B. Falle A gleichmäßig
verteilt ist. **Dat zouden dan toch weer „ferne
Massen“ zijn!**

Dat zouden dan toch weer “ferne Massen”
zijn. z.o.

Als $g_{44} = 0$ moet worden voor $r = \frac{1}{2}\pi R$
door daar aanwezigen “materie”, hoe groot
moet dan de “massa” van de materie wel
zijn? Ik vermoed ∞ ! Ik adopteer die mate-
rie niet als gewone materie. Het is een
materia ex machina om het dogma van
Mach te redden.



Herrn

Prof. Dr. De Sitter

Lanzettastrasse

Zoorn (Holland)

Mrs. A. Einstein
Braunbergstr. 164
Zürich

Adresse des Absenders - Text.
Adresse de l'expéditeur - Texte
Indirizzo del mittente - Testo.

z.o. Als $g_{44} = 0$ moet worden om
 $2 = \frac{1}{2}\pi R$ door daar aanwezige
“materie”, hoe groot moet dan
de “massa” van die materie
zijn? Ik vermoed ∞ !
Ik adopteer die materie niet
als gewone materie. Het is een
materia ex machina om het dogma
van Mach te redden.

Einstein publiceert Machs principe en laat zien dat de De Sitter oplossing geen tegen-voorbeeld is

1918.

№ 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 55.

1. *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie;* *von A. Einstein.*

Eine Reihe von Publikationen der letzten Zeit, insbesondere die neulich in diesen Annalen 53. Heft 16 erschienene scharfsinnige Arbeit von Kretschmann, veranlassen mich, nochmals auf die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie zurückzukommen. Dabei ist es mein Ziel, lediglich die Grundgedanken herauszuheben, wobei ich die Theorie als bekannt voraussetze.

Die Theorie, wie sie mir heute vorschwebt, beruht auf drei Hauptgesichtspunkten, die allerdings keineswegs voneinander unabhängig sind. Sie seien im folgenden kurz angeführt und charakterisiert und hierauf im nachfolgenden von einigen Seiten beleuchtet:

a) *Relativitätsprinzip*: Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Koinzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten Gleichungen.

b) *Äquivalenzprinzip*: Trägheit und Schwere sind wesensgleich. Hieraus und aus den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie folgt notwendig, daß der symmetrische „Fundamentaltensor“ ($g_{\mu\nu}$) die metrischen Eigenschaften des Raumes, das Trägheitsverhalten der Körper in ihm, sowie die Gravitationswirkungen bestimmt. Den durch den Fundamentaltensor beschriebenen Raumzustand wollen wir als „*G*-Feld“ bezeichnen.

c) *Machsches Prinzip*¹⁾: Das *G*-Feld ist *restlos* durch die Massen der Körper bestimmt. Da Masse und Energie nach

1) Bisher habe ich die Prinzipie a) und c) nicht auseinandergelassen, was aber verwirrend wirkte. Den Namen „Machsches Prinzip“ habe ich deshalb gewählt, weil dies Prinzip eine Verallgemeinerung der Machschen Forderung bedeutet, daß die Trägheit auf eine Wechselwirkung der Körper zurückgeführt werden müsse.

“Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie.”
Annalen der Physik 55 (1918): 241–244.

Einstein publiceert Machs principe en laat zien dat de De Sitter oplossing geen tegen-voorbeeld is

270 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 7. März 1918

Kritisches zu einer von Hrn. DE SITTER gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen.

VON A. EINSTEIN.

Hr. DE SITTER, dem wir tiefgreifende Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Relativitätstheorie verdanken, hat in letzter Zeit eine Lösung der Gravitationsgleichungen gegeben¹, welche nach seiner Meinung möglicherweise die metrische Struktur des Weltraumes darstellen könnte. Gegen die Zulässigkeit dieser Lösung scheint mir aber ein schwerwiegendes Argument zu sprechen, das im folgenden dargelegt werden soll.

Die DE SITTERSche Lösung der Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \kappa T \quad (1)$$

lautet

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 0 \text{ (für alle Indices)} \\ ds^2 &= -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2] + \cos^2 \frac{r}{R} c^2 dt^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei r, ψ, θ, t als Koordinaten (x_1, \dots, x_4) aufzufassen sind. —

Wir werden es als Forderung der Theorie zu bezeichnen haben, daß die Gleichungen (1) für alle Punkte im Endlichen gelten. Dies wird nur dann der Fall sein können, wenn sowohl die $g_{\mu\nu}$, wie die zugehörigen kontravarianten $g^{\mu\nu}$ (nebst ihren ersten Ableitungen) stetig und differenzierbar sind; im besonderen darf also die Determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ nirgends im Endlichen verschwinden. Diese Aussage bedarf aber noch einer näheren Bestimmung und einer Einschränkung. Ein Punkt P heißt dann »ein im Endlichen gelegener Punkt«, wenn er mit einem ein für allemal gewählten Anfangspunkt P_0 durch eine Kurve verbunden werden kann, so daß das über diese erstreckte Abstandsintegral

“Kritisches zu einer von Hrn. de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen.” *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte (1918): 270–272.*

¹ Proc. Acad. Amsterdam. Vol. XX. 30. Juni 1917. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. LXXVIII. Nr. 1.

Einstein bijt in het stof


Felix Klein laat in een brief aan Einstein zien dat het vreemde gedrag van g_{44} in de statische vorm van het hyperboloïde heelal niks te maken heeft met massa's op de equator.

... Einstein begrijpt Klein in eerste instantie niet ...

Einstein aan Felix Klein, begin juni 1918: **“Bei meiner Lösung sitzt die Materie gleichmässig verteilt auf der ganzen Kugelfläche; bei De Sitter ist sie am Aequator $r/R = \pi/2$ konzentriert [...] De Sitter glaubt mit Unrecht, dass seine Lösung die Existenz von Materie nicht voraussetze. [Hermann] Weyl hat in seinem demnächst erscheinenden Buche [Raum-Zeit-Materie] gezeigt, dass man den De Sitter'schen Fall wirklich als Grenzfall erhält des allgemeineren [...]”**

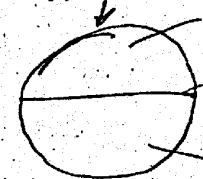
Bei meiner Lösung sitzt die Materie gleichmässig verteilt auf der ganzen Kugelfläche; bei De Sitter ist sie am Aequator ($\frac{r}{R} = \frac{\pi}{2}$) konzentriert.

Einstein



Materie gleichmässig verteilt

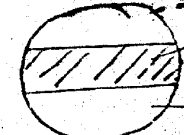
De Sitter



De Sitter
leer
Materie am Aequator
leer

De Sitter glaubt mit Unrecht, dass seine Lösung die Existenz von Materie nicht voraussetze. Weyl hat in seinem demnächst erscheinenden Buche gezeigt, dass man den De Sitter'schen Fall wirklich als Grenzfall erhält des allgemeineren

Weyls hybride oplossing



leer
interne endliche Punkte über äquatoriale Zone verteilt.
leer

Einstein bijt in het stof

... Klein legt het nog een keer uit en dit keer begrijpt Einstein het meteen ...

Einstein to Felix Klein, 20 juni 1918: “Sie haben vollkommen Recht. Die De Sitter'sche Welt ist an sich singularitätsfrei und ihre Weltpunkte sind alle gleichwertig. Eine Singularität kommt erst durch die Substitution zustande, welche den Übergang auf die statische Form des Linienelements liefert.”

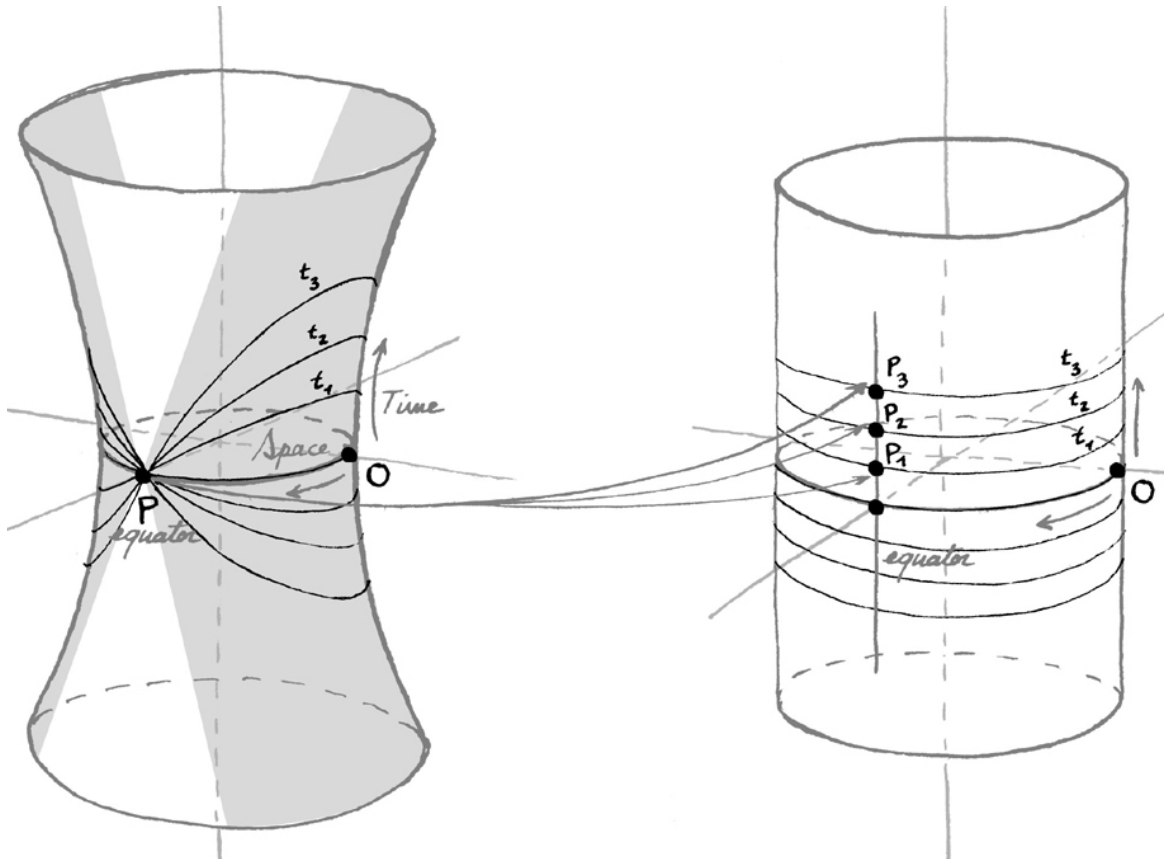
Klein.

Kladversie van Einsteins antwoord (Klein aan Einstein, 16 juni 1918)

Be-za minen kleinen Brief vom 9. Juni ist in Ordnung, bringe ihn zu Einstein. Die
 α p sind für $\alpha \neq 4$ nicht die Welt, die bei $\alpha = 4$ von ihm als beliebig klein.
 Antwort. Sie haben vollkommen Recht. Die De Sitter'sche Welt ist an sich singularitätsfrei
 und ihre Weltpunkte sind alle gleichwertig. Eine Singularität kommt erst durch
 die Substitution zustande, welche den Übergang zur statischen Form des Linien-
 elements liefert. Diese Substitution ändert die Ausdrucks-Form des Linien-
 elements.

Einstein to Ehrenfest, 6 december 1918: “Hoffentlich erholt sich De Sitter bald wieder; meine Kritik an einer seiner Arbeiten war zum Teil nur zutreffend, was mir jetzt besonders leid thut.”

Felix Kleins analyse van het vreemde gedrag van g_{44} in de statische vorm van het hyperboloïde heelal: $g_{44} = 0$ in punt P omdat één hetzelfde punt P op de hyperboloïde wordt afgebeeld op een hele lijn punten P_1, P_2, P_3 etc. (cf. de noord- en de zuidpool op een standaard kaart van de aarde)



Coördinaten afstand
tussen P_1 en P_3
 $= 2$.

Intrinsieke afstand
tussen P_1 en P_3
 $= 0$.

Coördinaten afstand
 $\times g_{44}$
 $=$ Intrinsieke afstand

In dit geval:
 $2 \times g_{44} = 0$
 $\rightarrow g_{44} = 0!$

Conclusie: het vreemde gedrag van g_{44} in P is een artefact van de kaart van ruimte-tijd; P is een punt als alle andere op de hyperboloïde.

Einstein geeft Machs principe eraan. Inaugurele rede in Leiden, 27 oktober 1920

ÄTHER
UND
RELATIVITÄTSTHEORIE

REDE
GEHALTEN AM 5. MAI 1920
AN DER REICHS-UNIVERSITÄT ZU LEIDEN

VON

ALBERT EINSTEIN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

De balans opmakend: Relativiteit van willekeurige beweging was de inzet van het debat tussen Einstein en De Sitter maar de uitkomst was de lancering van relativistische kosmologie met de eerste twee relativistische modellen van het heelal, Einsteins cylinder en De Sitters hyperboloïde.

Het uitdijend heelal (Friedmann, Lemaître, Hubble, ...)

“Einstein’s original gravity equation was correct, and changing it was a mistake. Much later, when I was discussing cosmological problems with Einstein, he remarked that the introduction of the cosmological term was the biggest blunder he ever made in his life. But the “blunder,” rejected by Einstein... rears its ugly head again and again and again.”

—George Gamow, *My World Line*. New York: Viking Press, 1970. Pp. 149–150.

... en de kosmologische konstante steekt opnieuw de kop op

Het versneld uitdijende heelal (Cosmic Microwave Background [CMB] (COBE, Boomerang, Maxima, WMAP) and ‘Type Ia Supernovae’ [SN Ia] (Brian Schmidt, Saul Perlmutter): de kosmologische term geeft een goede fenomenologische beschrijving van het anti-zwaartekracht effect van de ‘dark energy’ verantwoordelijk voor het versnellen van het uitdijen van het heelal.

Onze helden in Pasadena, Californië, begin jaren dertig

