

## Spontane patroonvorming in niet-evenwichtssystemen

Wim van Saarloos

*Instituut-Lorentz, Universiteit Leiden*

*Postbus 9506, 2300 RA Leiden*

### Inleiding – de breedte van het werkterrein van de theoretisch fysicus

Veel mensen denken bij “theoretisch natuurkundigen” allereerst aan fysici die zich bezighouden met de fundamentele van de quantummechanica, de elementaire krachten tussen deeltjes (snaartheorie!), de unificatie van die krachten, de algemene relativiteitstheorie, de oorsprong van het heelal, of misschien zelfs de vraag hoe de wetten van de quantummechanica ooit zouden kunnen leiden tot quantumcomputers die de rekenkracht van onze huidige computers verre kunnen overtreffen. Dit beeld is heel goed te begrijpen, immers veel natuurkundigen en nobelprijswinnaars genieten hun bekendheid vanwege werk op dit gebied.

In mijn voordracht heb ik aan de hand van een aantal voorbeelden willen illustreren dat dit beeld niettemin te eenzijdig is: er zijn ook veel vooraanstaande theoretisch fysici die uitdagend werk doen aan problemen die veel dichterbij huis liggen, zoals de spontane vorming van patronen zoals hier bediscussieerd, het gedrag van granulaire media als zand, het breken van materialen, of het gedrag van “complexe materialen” als vloeibare kristallen en polymeren. Ook onder dit soort fysici zijn bekende Nobelprijswinnaars te vinden: de Franse theoreticus de Gennes kreeg in 1991 de Nobelprijs voor zijn theoretische doorbraken op het gebied van de theorie van het gedrag van vloeibare kristallen en polymeren, en de Amerikaanse theoreticus Anderson ontving in 1977 de nobelprijs voor de natuurkunde onder meer voor zijn fundamentele inzichten op het gebied van de invloed van verontreinigingen op het geleidingsgedrag van metalen. Het onderzoek van deze beide fysici klinkt voor de leek op het eerste gezicht misschien weinig uitdagend, maar het bijzondere van hun werk was juist dat ze onverwachte en zeer fundamentele inzichten hebben ontwikkeld op plaatsen waar niemand die verwacht had, en dat ze daarbij vaak onvermoede verbanden met andere deelgebieden hebben ontdekt.

Er zit overigens een interessant wetenschapsfilosofisch aspect aan deze observaties. Soms spreken fysici over “de theorie van alles” als een heilige graal die nagejaagd wordt. Hierbij wordt in feite meestal bedoeld op een theorie die de zogenaamde “fundamentele krachten” tussen de elementaire bouwstenen van de natuur (zoals de elektronen) beschrijft en unificeert. Echter, een “theorie van alles” zal in de praktijk een theorie van precies dat en weinig meer zijn – vrijwel alle natuurkunde van het moleculaire niveau tot dat van onze dagelijkse omgevingswereld zal er niet door worden beschreven. Dat er ook op het niveau van de fysica van de wereld om ons heen *nieuwe* uitdagende fysica en nieuwe fundamentele doorbraken voor het grijpen ligt, hangt samen met het feit dat op vrijwel elke laag van organisatiegraad zich weer nieuwe verschijnselen voordoen die vragen om een nieuwe begrippen, nieuwe technieken etcetera. In de praktijk is de uitdaging voor de natuurwetenschappers in deze gebieden niet alleen deze nieuwe concepten te ontwikkelen, maar ook om uit de veelheid van verschijnselen en observaties die cruciale elementen te filteren, die hen in staat stelt een meer algemeen geldende

theorie te ontwikkelen. Op elk niveau kunnen daardoor nieuwe fundamentele natuurkundige begrippen en concepten nodig zijn, al zijn veel van de concepten binnen een bepaald niveau vaak wel weer nauw verbonden met die van een niveau hieronder. Uiteraard gelden deze opmerkingen niet alleen voor de natuurkunde, maar in veel bredere zin voor de gehele (natuur)wetenschap. Zo zijn voor een beschrijving van zelf-organiserende biologische systemen ongetwijfeld nieuwe concepten nodig, maar zullen deze zeker elementen gemeen hebben met het begrippenapparaat dat voor natuurkundige (levenloze) zelf-organiserende systemen ontwikkeld is.

In mijn voordracht heb ik een aantal voorbeelden van spontane patroonvormende systemen in de natuur besproken, die de laatste jaren onderwerp van actieve studie binnen de natuurkunde zijn of zijn geweest, en die een aantal verrassingen of verrassende verbanden met andere problemen hebben opgeleverd. Hieronder worden deze kort samengevat aan de hand van een drietal illustratieve figuren.

### **Kristalgroei en groei van andere grensvlakken**

Hoewel de bijzondere vormen van sneeuwvlokken de mensheid al lang geïntrigeerd hebben (Descartes bestudeerde al de verschijningsvormen van sneeuwvlokken), zijn natuurkundigen zich pas sedert het begin van de jaren tachtig van de vorige eeuw gaan interesseren voor de opmerkelijke verschijningsvormen die meer algemeen optreden tijdens kristalgroei. Figuur 1 toont een voorbeeld van de tip van een kristal; dergelijke structuren worden “dendrieten” genoemd, naar het griekse woord “dendros”, boom. De instabiliteit die spontaan aanleiding geeft tot dergelijke groeivormen is inmiddels goed begrepen. In essentie komt het er op neer dat tijdens het stollen aan het grensvlak warmte vrijkomt. Deze warmte kan makkelijker wegvloeien bij een kleine uitstulping van het oppervlak; als er dus eenmaal een kleine uitstulping is, groeit die sneller dan naburige stukken oppervlak, en daardoor worden de oneffenheden aan het oppervlak versterkt.

Wiskundig gezien zijn dergelijke groeiproblemen zeer uitdagend. In een theoretisch model wil men de evolutie van het grensvlak tussen de vaste stof en de vloeistof beschrijven, en deze evolutie hangt af van de het warmtetransport in de vloeistof en in de vaste stof. Maar tegelijkertijd wordt het warmtetransport sterk bepaald door de vorm van het oppervlak – de twee zijn dus sterk gekoppeld, en de oplossing van het probleem (de vorm van het oppervlak als functie van de tijd) is in feite versleuteld in de formulering van het probleem zelf! Wiskundigen noemen dergelijke problemen “moving boundary problems”.

Een van de verrassingen van het onderzoek van de afgelopen jaren is geweest dat de oppervlakte spanning (de spanning die ervoor zorgt dat zeepbellen rond willen zijn) sterk de vorm van dergelijke dendrieten bepaalt, en dat de anisotropie in de oppervlaktetenspanning, die een gevolg is van de atomaire structuur van de materie, heel sterk de groeisnelheid van dergelijke dendritische structuren bepaalt.

## Universaliteit in front propagatie

Uit het weerbericht kennen we allemaal het begrip front van de termen “koude front” en “warmte front” – we spreken van een koude front als een gebied met koudere lucht een gebied met warmere lucht binnendringt. Meer algemeen gebruiken we het begrip front voor de overgangszone die twee gebieden met verschillend gedrag scheidt. Fronten komen niet alleen in de meteorologie en natuurkunde voor, ze spelen ook een grote rol in de biologie en met name de populatie dynamica, bijvoorbeeld bij de beschrijving van hoe een infectie zich door een populatie verspreidt. Een voorbeeld van een niet-triviaal front op het grensvlak van de natuurkunde en biologie ziet u in Figuur 2.

Een belangrijke klasse van front problemen is die waarbij de toestand in het gebied waar het front naar toe loopt, *instabiel* is. Met instabiel bedoelen we dat een kleine verstoring van de toestand vanzelf groter en groter wordt (ongeveer net zo als de instabiliteit die we hierboven beschreven bij kristalgroei). Een van de doorbraken die we de afgelopen jaren in onze groep bereikt hebben, is dat we een heel algemeen geldende (“universele”, zegt de fysicus) formule hebben kunnen afleiden voor de snelheid van dergelijke fronten, bijvoorbeeld van het front in Figuur 2. Onze formule geeft niet alleen de asymptotische snelheid van fronten, maar vertelt ook precies hoe de asymptotische snelheid genaderd wordt. Door onze analyse kunnen allerlei empirische observaties en resultaten uit verschillende vakgebieden (uit de biologie, chemie, vloeistofstroming, natuurkunde, etcetera) met elkaar in verband worden gebracht.

Het is in het voorbijgaan aardig om op te merken dat de historie van het probleem van frontpropagatie illustreert hoe er op het gebied van complexe systemen vaak vooruitgang geboekt kan worden door concepten uit een gebied in een ander gebied toe te passen<sup>1</sup>. De eerste formulering van het mathematische probleem van een front dat een lineair instabiel gebied in loopt, werd door Kolmogorov en collega's gegeven in 1937, en onafhankelijk van hen door Fisher in hetzelfde jaar. Zij bestudeerden een probleem in de populatie dynamica, bijvoorbeeld hoe een ziekte zich verspreidt in een populatie. Rond 1975 gaven de wiskundigen Aronson en Weinberger een complete en wiskundig rigoreuze analyse van de vergelijkingen die in 1937 geïntroduceerd waren. Rond 1980 ontdekten fysici in studies van ingewikkelder problemen in de fysica dat veel van de eerdere resultaten een bredere geldigheid leken te hebben, als ze op een andere manier geformuleerd werden. Bij mijn analyse van deze nieuwe formulering ontdekte ik in 1989 een verband met een algemene analyse van de groei en propagatie van kleine verstoringen in de plasmafysica, en pas tien jaar later werd, in samenwerking met de toenmalige Leidse postdoc Ebert, duidelijk hoe de methodes uit de plasmafysica aangewend konden worden om nieuwe exacte en meer algemene resultaten af te leiden, die alle eerdere resultaten overstegen. Onze methode gaf weer aanleiding tot een nieuwe wiskundige methode voor de bestudering van front propagatie.

---

<sup>1</sup> In het voorwoord van zijn boek *The physics of Liquid Crystals* (Clarendon Press, Oxford, 1998) schijft de hierbovengenoemde Nobelprijswinnaar de Gennes dan ook “What a theorist can and should systematically introduce is comparisons with other fields”.

## De spontane kronkeling-instabiliteit bij polymeerstroming

Plastics bestaan uit polymeren, lange keten-moleculen. Als dergelijke moleculen stromen in een vloeistof, dan worden deze ketens uitgerekt door de stroming – het is alsof er minuscule kleine uitgerekte elastiekjes in een stromende polymeervloeistof zitten. Het hoeft geen verbazing te wekken dat een dergelijke vloeistof zich heel anders gedraagt dan simpele vloeistoffen, als water en alcohol. Figuur 3 illustreert dit: in deze figuur ziet u vijf opnames van een polymeeroplossing die aan de bovenkant uit een buis stroomt. De stroomsnelheid neemt toe van links naar rechts, en de figuur laat zien dat als de stroomsnelheid te groot wordt, er spontaan kronkelingen ontstaan in de stroming. Als een dergelijk proces in de industrie gebruikt wordt om bijvoorbeeld een gladde visdraad te maken of een gladde overhead transparant, dan is duidelijk het optreden van deze kronkeling-instabiliteit ongewenst.

Juist vanwege het belang ervan in de industrie is dit gedrag al meer dan vijftig jaar bekend. Onlangs hebben we in onze groep nieuw licht kunnen werpen op de oorsprong van dit gedrag. Tot voor kort werd namelijk aangenomen dat de stroming in de buis zelf (dus aan de bovenkant in de figuur) *nooit* instabiel zou kunnen zijn, en dat de kronkelingen dus ergens anders zouden moeten ontstaan. Met nieuwe wiskundige technieken, die in een ander deelgebied van de fysica ontwikkeld waren, hebben we echter kunnen aantonen dat de stroming weliswaar stabiel is voor willekeurig kleine verstoringen, maar instabiel voor verstoringen van voldoende grootte. Dit opent de mogelijkheid om een hele klasse van spontane patroonvorming problemen te analyseren, die bovendien industrieel relevant is.

### Verder lezen

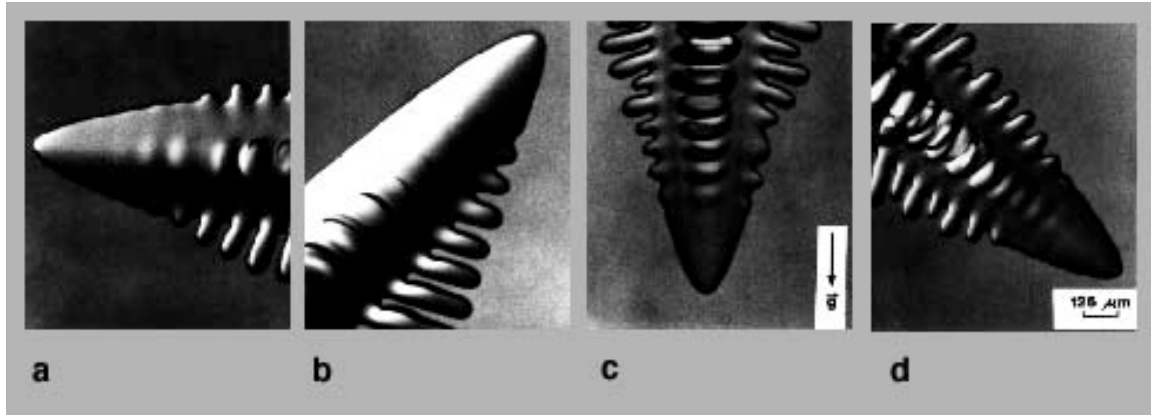
De meeste literatuur op het gebied van de problemen die hierboven zijn aangestipt is slecht toegankelijk voor leken. Op mijn eigen homepage <http://www.lorentz.leidenuniv.nl/~saarloos> kunt u korte beschrijvingen in lekentaal vinden van veel van het onderzoek dat hierboven is aangestipt.

De volgende boeken en artikelen bevatten ook goede introducties tot de verschillende deelgebieden:

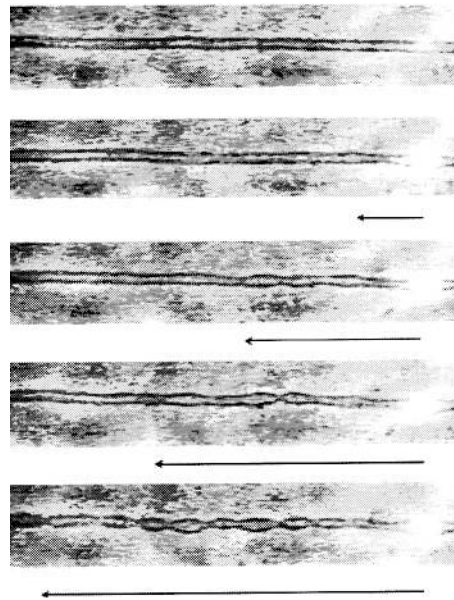
1. M. C. Cross en P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1992) [een van de belangrijkste overzichtsartikelen van de ontwikkelingen binnen de fysica tot begin jaren negentig, maar minder toegankelijk voor buitenstaanders].
2. J. Murray, *Mathematical Biology*, (Springer, Berlin, 1989) [dit boek, bedoeld voor onderzoekers, bevat veel voorbeelden van spontane patroonvorming in de biologie].
3. P. Pelcé, *New visions on form and growth*, (Oxford University Press) [bevat een algemene introductie tot groeivormen in de fysica, zoals dendrieten].

4. P. Meakin, *Fractals, Scaling and Growth far from Equilibrium*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998) [bevat een uitputtend overzicht van fractale groeivormen].
5. I. Stewart, *Life's other Secret*, (Penguin, London, 1998) [een introductie voor de leek van diverse voorbeelden van het spontaan ontstaan van patronen in de levenswetenschappen].
6. W. van Saarloos, *Front Propagation into Unstable States*, Phys. Rep. **386**, 29 (2003) [Dit artikel, dat een uitgebreide introductie met veel voorbeelden van front propagatie bevat, is te downloaden van bovengenoemde webpagina].

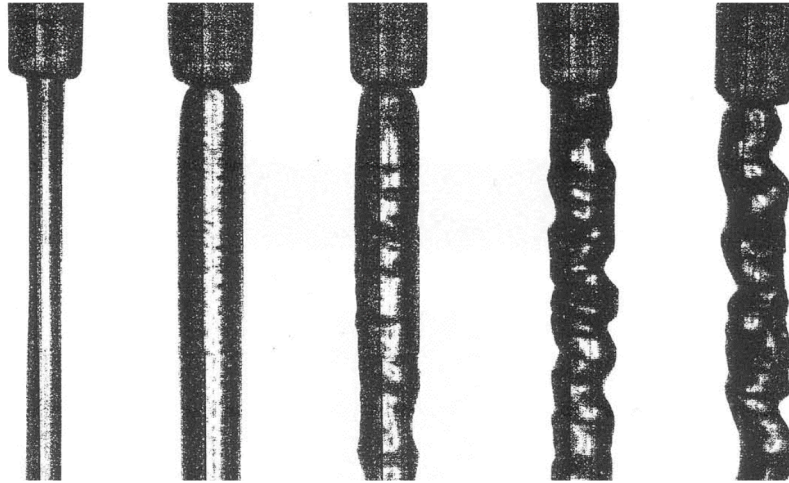
## Figure captions



*Figuur 1.* Vier opnames van een “dendritische tip” van een groeiend kristal. Door stroming in de vloeistof die ontstaan ten gevolge van de temperatuurgradiënten en de zwaartekracht hangt de vorm sterk af van de oriëntatie ten opzichte van de zwaartekracht. Foto’s: M. Glicksman, USA.



*Figuur 2.* Voorbeeld van een verschijnsel dat verrassend genoeg als “front propagatie” probleem opgevat kan worden: vijf opnames van een cilindervormig membraan dat in de bovenste opname aan de rechterkant net door een sterke bundel laserlicht beschoren is. Deze lichtbundel verandert de concentratie van moleculen op het membraan, dat daardoor een rimpelachtige structuur als van een parelketting gaat vertonen. Zoals de pijlen illustreren breidt het parelketting-achtige gebied zich vervolgens snel naar links uit. Dit heel gecompliceerde probleem kan niettemin beschreven worden in termen van een naar links propagerend front, dat beschreven wordt door de analyse zoals genoemd in de tekst. Foto’s: E. Moses, Israel.



*Figuur 3.* Vijf opnamen van de stroming van een polymeer-oplossing uit een buis aan de bovenkant. Van links naar rechts neemt de stroomsterkte toe. Bij de middelste foto is duidelijk te zien dat er spontaan een kronkeling-instabiliteit begint op te treden.